

Modelle für Teilraumverbände in überabzählbar dimensionalen Sesquilinearräumen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophischen Fakultät II

der

Universität Zürich

von

*Erwin Ampor*t**

aus Luzern und Thunstetten (Kanton Bern)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. H. Gross

Juris Druck + Verlag Zürich

1981

*Modelle für Teilraumverbände
in überabzählbar dimensionalen
Sesquilinearräumen*

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophischen Fakultät II

der

Universität Zürich

von

Erwin Amport

aus Luzern und Thunstetten (Kanton Bern)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. H. Gross

Juris Druck + Verlag Zürich

1981



Inhaltsverzeichnis

3

Einleitung

5

I. Bezeichnungen und Resultate

8

I.1 Isoperimetrische Räume

8

I.2 Lineartopologische Räume

9

I.3 Verbände

11

II. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{30}$, falls E λ -euklidisch ist

12

II.1 Der Verband $\mathcal{V}_{30}$

12

II.2 Konstruktion eines Modells für den Verband $\mathcal{V}_{30}$

14

III. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{25}$, falls E und V λ -euklidisch sind

30

IV. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{14}$ von Kaplansky

30

V. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}(V)$ ($\lambda=1$)

32

V.1 Der Verband $\mathcal{V}(V)$

32

V.2 Konstruktion eines Modells für den Verband $\mathcal{V}(V)$

39

VI. Reduktion des Verbandes $\tilde{\mathcal{V}}$

110

Literatur

117

Lebenslauf

119



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507212_0014

Einleitung

Wir betrachten einen Vektorraum E von überabzählbarer Dimension $\aleph_\alpha$, versehen mit einer nicht ausgearteten Sesquilinearform Φ . Ferner sei V ein linearer Teilraum von E . Das Paar (V, E) wird bei abzählbarer Dimension von E teilweise durch den Verband von Kaplansky ([4], [6], [9]) beschrieben. Dieser Verband ist für die Untersuchung von Wittschen Sätzen grundlegend ([4], [5], [6]). Gross hat bewiesen ([4] p. 131, [6]), dass im alternierenden Fall die Indices (Dimensionen der Quotientenräume) eine vollständige Menge orthogonaler Invarianten eines Teilraumes V bilden. Bei überabzählbarer Dimension von E hingegen genügt der Kaplansky-Verband zur Beschreibung der orthogonalen Struktur eines Teilraumes nicht mehr ([4] p. 131, [7], p. 131 ff). Neben der schwachen linearen Topologie $\sigma_0(E, \Phi)$ ([4], [10]) wird hier u. a. die σ_α -Topologie ([2]) offensichtliche Invarianten der Orbits der linearen Teilräume von E (unter der orthogonalen Gruppe von E) liefern. Für eine Charakterisierung der Orbits muss ein grösserer Verband betrachtet werden, der den Verband von Kaplansky als Teilverband enthält, im allgemeinen aber überabzählbar ist.

Ein solcher Teilverband $\mathcal{V}(V)$ des Verbandes $\mathcal{L}(E)$ aller linearen Teilräume von E wurde in [1] berechnet. $\mathcal{V}(V)$ enthält die Elemente $(0), V, E$ und ist stabil unter $\perp$ sowie unter dem topologischen

Abschluss der linearen $\perp$ -Topologie $\mathcal{O}_\perp(E, \Phi)$. ($\mathcal{V}$ ist also der von V unter den Operationen $+$, $\cap$, $\perp$ und $-$ in $\mathcal{L}(E)$ erzeugte Verband). Ferner ist $\mathcal{V}$ vollständig, jedoch nicht vollständig als Teilverband von $\mathcal{L}(E)$. Da für die Behandlung Wittscher Sätze ein vollständiger Teilverband von $\mathcal{L}(E)$ vorteilhaft ist (vergl. [4] und [8]), wurde in [1] auch die Vervollständigung $\tilde{\mathcal{V}}$ des Verbandes $\mathcal{V}$ in $\mathcal{L}(E)$ konstruiert.

Schliesslich wurden in [1] noch folgende Teilverbände des Verbandes $\mathcal{V}$ berechnet:

- Der Verband $\mathcal{V}_{30}$, falls E $\perp$ -euklidisch ist. Er enthält 30 Elemente.
- Der Verband $\mathcal{V}_{25}$, falls E und V $\perp$ -euklidisch sind. Er enthält 25 Elemente.

In der vorliegenden Arbeit werden Modelle in $\mathcal{L}(E)$ der erwähnten Verbände konstruiert. Ein Modell des Verbandes $\tilde{\mathcal{V}}$ kann erst nach dessen Reduktion angegeben werden. Diese Vereinfachung zeigt eindrücklich die Notwendigkeit von Modellen für die wichtigsten Verbände.

Natürlich existieren weitere interessante, unter den Operationen $+$, $\cap$, $\perp$ und $-$ in $\mathcal{L}(E)$ erzeugte Verbände. Die Konstruktion des Modells für $\mathcal{V}$ ist aber so allgemein, dass man mit derselben Methode auch für diese Verbände Modelle finden kann. In diesem

Sinn ist das Modell für den Verband $\mathcal{V}$ als Prototyp zu betrachten.

Einerseits sollen im Modell für den Verband $\mathcal{V}$ alle (unendlich vielen) Verbandselemente verschieden ausfallen. Andererseits muss man die Räume E und V so durchsichtig konstruieren, dass man nebst Summen und Durchschnitten die σ_0 - und σ_2 -Abschlüsse, sowie die Orthogonalräume sämtlicher Verbandselemente explizit berechnen kann. Weil $\mathcal{V}$ vom Teilraum V erzeugt wird, muss V alle topologischen Strukturen enthalten, welche die Verschiedenheit der Verbandselemente bewirken. Oft müssen diese Strukturen den wiederholten σ_0 - und σ_2 -Abschluss (sowie eventuell $\perp$) unverändert passieren. Trotzdem lösen sie sich nachher an genau vorgeschriebenen Stellen auf, und bewirken damit die Verschiedenheit bestimmter Verbandselemente.

Herrn Prof. Dr. H. Gross danke ich für die Anregung und Begutachtung dieser Arbeit.

I. Bezeichnungen und Resultate

I.1 Sesquilinearräume (vergl. [4]).

Sei k ein Körper. Eine Bijektion $v: k \rightarrow k$ heisst Antiautomorphismus, wenn $v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$ und $v(\alpha\beta) = v(\beta)v(\alpha)$ für alle $\alpha, \beta \in k$. Sei E ein k -Linksvektorraum. Eine Abbildung $\Phi: E \times E \rightarrow k$ heisst sesquilinear bezüglich v , wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: $\Phi(x+y, z) = \Phi(x, z) + \Phi(y, z)$, $\Phi(x, y+z) = \Phi(x, y) + \Phi(x, z)$, $\Phi(\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y)$, $\Phi(x, \lambda y) = \Phi(x, y) \lambda^v$ für alle $\lambda \in k$ und $x, y, z \in E$. Φ heisst orthosymmetrisch, wenn aus $\Phi(x, y) = 0$ folgt $\Phi(y, x) = 0$. Unter einem sesquilinearraum (E, Φ) versteht man einen k -Linksvektorraum E , versehen mit einer orthosymmetrischen, bezüglich eines geeigneten Körper-Antiautomorphismus von k sesquilinearen Form Φ . Falls $\Phi(x, y) = 0$, sagt man, x stehe senkrecht auf y , in Zeichen $x \perp y$. Für $A \subseteq E$ sei $A^\perp := \{x \in E \mid \Phi(x, y) = 0, \forall y \in A\}$. Falls $E^\perp = \{0\}$, heisst (E, Φ) nicht ausgeartet. Teilräume F von (E, Φ) werden gewöhnlich mit der von Φ induzierten Form (Restriktion) versehen. Ist $F \subseteq F^\perp$, dann heisst der Teilraum F totalisotrop. $F \cap F^\perp$ ist das Radikal $\text{rad } F$ von F . Ein Teilraum F heisst orthogonal abgeschlossen, falls $F^{\perp\perp} = F$. Ist F ein orthogonal abgeschlossener Teilraum und G ein endlich dimensionaler Teilraum von E , $E^\perp = (0)$, dann ist $F+G$ orthogonal abgeschlossen. Wie üblich schreiben wir $\|x\|$ für $\Phi(x, x)$ und nennen $\|x\|$ die Länge von x . Alle in dieser Arbeit betrachteten Basen von Vektorräumen sind algebraische, sog. Hamelbasen. $E = k(e_i)_{i \in I}$ ist ein k -Raum, aufgespannt von den

Basisvektoren $e_i, i \in I$; $F = k(e_i, e_j, \dots, e_e)$ wird von den Basisvektoren $e_i, e_j, \dots, e_e$ aufgespannt. Für Teilmengen A, B eines Sesquilinearraumes (E, Φ) gilt:
 $A \subset A^{\perp\perp}$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$, $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$, $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

In der ganzen Arbeit sei $\aleph$ eine Ordinalzahl, für die $\aleph$ eine reguläre Kardinalzahl ist. Für eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Kardinalzahlen mit $a_i < \aleph$ und $|I| < \aleph$ gilt also $\sum_{i \in I} a_i < \aleph$. Für $\aleph = 0$ oder Nachfolgerindex $\aleph$ ist dies erfüllt.

Ein nicht ausgearteter Sesquilinearraum (E, Φ) heisst $\aleph$ -euklidisch, falls er eine direkte orthogonale Zerlegung $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ mit $\dim E_i < \aleph$ besitzt. Die Begriffe 0-euklidisch und 1-euklidisch sind äquivalent, da ein Sesquilinearraum (E, Φ) mit $\dim E \leq \aleph_0$ sich immer orthogonal in endlichdimensionale Räume zerlegen lässt. Wir nennen solche Räume einfach euklidisch.

I.2 Lineartopologische Räume (vergl. [2]).

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einem k -Vektorraum E heisst linear, falls der Null-Umgebungsfiler eine aus linearen Teilräumen bestehende Basis besitzt, und die Umgebungen $U(x_0)$ durch Translation $x_0 + U(0)$ aus den Nullumgebungen entstehen. $(E, \mathcal{T})$ ist dann ein lineartopologischer Raum. Versieht man k mit der diskreten Topologie, so ist $\mathcal{T}$ mit der algebraischen Struktur auf E verträglich (die linearen Operationen auf E sind stetig) und $(E, \mathcal{T})$ ist ein topologischer k -Vektorraum.

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf E heisst linear, wenn er eine

Basis besitzt, die aus affinen Teilräumen von E besteht. $\mathcal{F}$ heisst $\mathcal{L}$ -Filter, wenn der Durchschnitt von weniger als $\aleph_{\mathcal{L}}$ Filtermengen wieder eine Filtermenge ist.

Eine lineare Topologie $\mathcal{T}$ heisst $\mathcal{L}$ -Topologie oder $(E, \mathcal{T})$ ein $\mathcal{L}$ -Raum, wenn der Null-Umgebungsfilter ein $\mathcal{L}$ -Filter ist. Dabei gilt

- a) Teilräume von $\mathcal{L}$ -Räumen sind wieder $\mathcal{L}$ -Räume.
- b) Ein separierter $\mathcal{L}$ -Raum $(E, \mathcal{T})$ mit $\dim E < \aleph_{\mathcal{L}}$ ist diskret.
- c) Ist F ein Teilraum des separierten $\mathcal{L}$ -Raumes $(E, \mathcal{T})$ mit $\dim F < \aleph_{\mathcal{L}}$, dann ist F abgeschlossen in E .

Lesquilinearräume lassen sich in natürlicher Weise mit linearen Topologien versehen. Mit $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(E, \Phi)$ bezeichnen wir diejenige lineare $\mathcal{L}$ -Topologie auf E , welche $\{A^+ \mid A \subset E \text{ und } \dim A < \aleph_{\mathcal{L}}\}$ als Nullumgebungsbasis besitzt. Statt $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(E, \Phi)$ schreiben wir meist $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Für $\mathcal{L}=0$ erhält man die „schwache lineare Topologie“ $\mathcal{G}_0$ von (E, Φ) , für $\mathcal{L}=1$ die in [11] untersuchte „abzählbare Topologie“ $\mathcal{G}_1$. $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ ist genau dann separiert, wenn (E, Φ) nicht ausgeartet ist. Für den schwachen Abschluss gilt noch das folgende Kriterium:

Satz 1 ([4], p. 35). Ein Teilraum F eines Lesquilinearraumes (E, Φ) ist genau dann orthogonal abgeschlossen, wenn er schwach abgeschlossen ist (d.h. abgeschlossen bezügl. $\mathcal{G}_0$).

Zur Konstruktion von Modellen für die Verbände $\mathcal{V}_{30}$ und $\mathcal{V}_{25}$ ist folgender Satz wichtig

Satz 2 ([2], Korollar zu Satz 6, p. 20). Sei (E, Φ) $\mathcal{L}$ -euklidisch, $\mathcal{L} > 0$. Ist $(F_{\mu})_{\mu \in M}$ eine Familie von Teilräumen von E mit $|M| < \aleph_{\mathcal{L}}$, dann gilt $\overline{\sum_{\mu \in M} F_{\mu}} = \sum_{\mu \in M} \overline{F_{\mu}}$ (— bezeichne den $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ -Abschluss).

Die folgenden Beziehungen werden wir für das Rechnen mit dem $\mathcal{G}_2$ -Abschluss oft verwenden. A, B seien dabei lineare Teilräume von E .

$$\bar{A} \subset A^\perp, A = A^{\perp\perp} \Rightarrow \bar{A} = A, (\bar{A})^\perp = \bar{A}^\perp = A^\perp, \overline{A+B} \subset \bar{A} + \bar{B}, \overline{\bar{A} + \bar{B}} = \overline{A+B}.$$

I.3 Verbände (vergl. [3]).

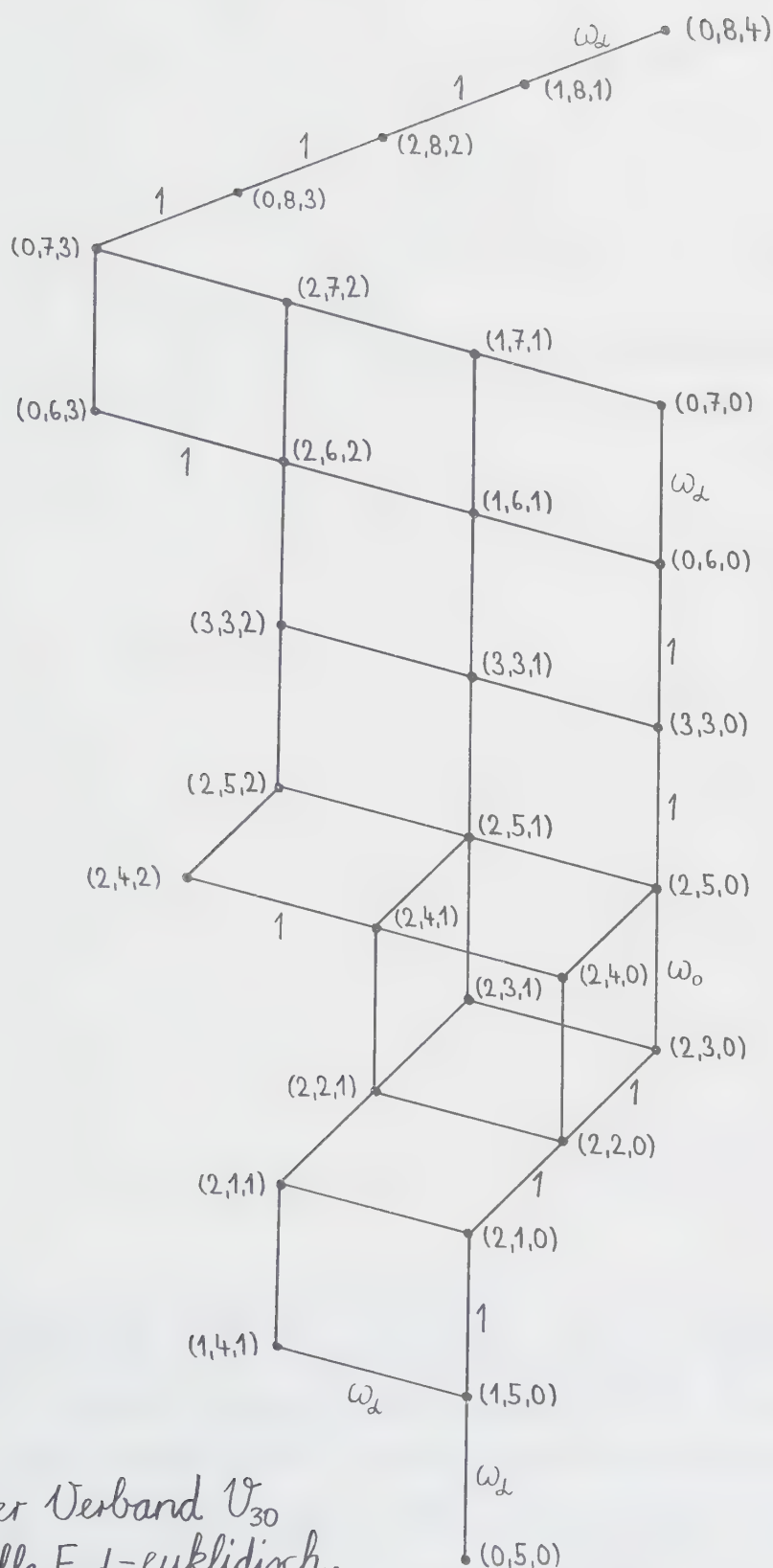
Ein Verband ist eine teilweise geordnete Menge, die zu je zwei Elementen A und B das Supremum $A \vee B$ und das Infimum $A \wedge B$ besitzt. Aus dieser Definition folgt leicht, dass ein Verband zu jeder endlichen Teilmenge M das Supremum $\sup M$ und das Infimum $\inf M$ enthält. Ein Verband $\mathcal{V}$ heisst modular, wenn aus $A \leq C$ folgt $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge C$, für alle $A, B, C \in \mathcal{V}$. $\mathcal{V}$ heisst distributiv, wenn er die schärfere Bedingung $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{V}$ erfüllt. Ein Verband heisst vollständig, wenn er Supremum und Infimum von beliebigen Teilmengen enthält. Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ eines vollständigen Verbandes $\mathcal{L}$ nennen wir einen vollständigen Teilverband von $\mathcal{L}$, falls für jede Teilmenge H von $\mathcal{U}$ $\inf_{\mathcal{U}} H$ und $\sup_{\mathcal{U}} H$ existieren und mit $\inf_{\mathcal{L}} H$ und $\sup_{\mathcal{L}} H$ zusammenfallen. Wir wollen noch darauf hinweisen, dass ein Teilverband eines Verbandes $\mathcal{L}$ vollständig sein kann, ohne ein vollständiger Teilverband von $\mathcal{L}$ zu sein. Die linearen Teilräume eines Vektorraumes E bilden bezüglich der Beziehung $A \subset B$ einen vollständigen, modularen Verband $\mathcal{L}(E)$. Die Verbandsoperationen $\vee$ und $\wedge$ sind identisch mit Σ und $\cap$. In [1] wurde bewiesen, dass die von uns betrachteten Verbände distributive, orthostabile und unter dem topologischen $\mathcal{G}_2$ -Abschluss stabile Teilverbände von $\mathcal{L}(E)$ sind.

II. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{30}$, falls E $\mathcal{L}$ -euklidisch ist

II.1 Der Verband $\mathcal{V}_{30}$ (vergl. [1], IV.5). In der ganzen Arbeit sei (E, Φ) ein nicht ausgearteter Lesquilinearraum mit $\dim E = \aleph_\alpha$, $\alpha > 0$, versehen mit der $\mathcal{O}_\alpha$ -Topologie, und V sei ein Teilraum von E ($\bar{}$ bezeichnet stets den $\mathcal{O}_\alpha$ -Abschluss). Wenn (E, Φ) $\mathcal{L}$ -euklidisch ist, gilt für beliebige Teilräume F und G von E die Beziehung $\overline{F+G} = \bar{F} + \bar{G}$ (vergl. Satz 2, p.10). Damit schrumpft der von V unter den Operationen $+$, $\cap$, $\perp$ und $\bar{}$ in $\mathcal{L}(E)$ erzeugte Verband auf die folgenden 30 Elemente zusammen:

$(0,5,0) = (0)$	$(3,3,0) = (\bar{V} \cap V^\perp)^\perp$
$(1,5,0) = \text{rad } V$	$(3,3,1) = V + (\bar{V} \cap V^\perp)^\perp$
$(1,4,1) = V$	$(3,3,2) = \bar{V} + (\bar{V} \cap V^\perp)^\perp$
$(2,1,0) = \overline{\text{rad } V}$	$(0,6,0) = \text{rad } (V^\perp)$
$(2,1,1) = V + \overline{\text{rad } V}$	$(1,6,1) = V + \text{rad } (V^\perp)$
$(2,2,0) = \bar{V} \cap (\text{rad } V)^\perp$	$(2,6,2) = \bar{V} + \text{rad } (V^\perp)$
$(2,2,1) = V + (\text{rad } V)^\perp \cap \bar{V}$	$(0,6,3) = V^\perp$
$(2,3,0) = (\text{rad } V)^\perp$	$(0,7,0) = V^\perp$
$(2,3,1) = V + (\text{rad } V)^\perp$	$(1,7,1) = V + V^\perp$
$(2,4,0) = \bar{V} \cap V^\perp$	$(2,7,2) = \bar{V} + V^\perp$
$(2,4,1) = V + V^\perp \cap \bar{V}$	$(0,7,3) = V^\perp + V^\perp$
$(2,4,2) = \bar{V}$	$(0,8,3) = (V + V^\perp)^\perp$
$(2,5,0) = (\bar{V} \cap V^\perp) + (\text{rad } V)^\perp$	$(2,8,2) = (\bar{V} \cap V^\perp)^\perp$
$(2,5,1) = V + (V^\perp \cap \bar{V}) + (\text{rad } V)^\perp$	$(1,8,1) = (\text{rad } V)^\perp$
$(2,5,2) = \bar{V} + (\text{rad } V)^\perp$	$(0,8,4) = E$.

Die Elemente von $\mathcal{V}_{30}$ werden also mit Tripeln von Ordinalzahlen bezeichnet.



Der Verband V_{30}
falls E d -euklidisch.

$(1, \omega_d$: Dimensionen von Quotientenräumen
benachbarter Elemente von V_{30})

14

$$(0,5,0)^{\perp} = (0,8,4)$$

$$(1,5,0)^{\perp} = (1,8,1)$$

$$(1,4,1)^{\perp} = (0,6,3)^{\perp} = (0,7,0)$$

$$(2,i,0)^{\perp} = (1,8,1) \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(2,i,0)^{\perp} = (3,3,0)^{\perp} = (2,8,2) \quad i = 4,5$$

$$(0,6,0)^{\perp} = (0,8,3)$$

$$(0,7,0)^{\perp} = (0,6,3)$$

$$(m,7,m)^{\perp} = (0,i,3)^{\perp} = (0,6,0) \quad m = 1,2 \quad ; \quad i = 7,8$$

$$(m,8,m)^{\perp} = (m+1,3,0) \quad m = 1,2$$

$$(0,8,4)^{\perp} = (0,5,0).$$

$$\overline{(0,5,0)} = (0,5,0)$$

$$\overline{(1,5,0)} = (2,1,0)$$

$$\overline{(1,4,1)} = \overline{(2,4,2)} = (2,4,2)$$

$$\overline{(2,i,0)} = (2,i,0) \quad 1 \leq i \leq 5$$

$$\overline{(2,i,1)} = \overline{(2,5,2)} = (2,5,2) \quad i = 3,5$$

$$\overline{(3,3,0)} = (3,3,0)$$

$$\overline{(3,3,1)} = \overline{(3,3,2)} = (3,3,2)$$

$$\overline{(0,i,0)} = (0,i,0) \quad i = 6,7$$

$$\overline{(1,i,1)} = \overline{(2,i,2)} = (2,i,2) \quad i = 6,7$$

$$\overline{(0,i,3)} = (0,i,3) \quad 6 \leq i \leq 8$$

$$\overline{(m,8,m)} = (m,8,m) \quad m = 1,2$$

$$\overline{(0,8,4)} = (0,8,4).$$

II.2 Konstruktion eines Modells für den Verband $\mathcal{V}_{30}$

Die Standardbasis des Sesquilinearraumes (E, Φ) wird im folgenden stets mit $\mathcal{B}$ abgekürzt. Die Elemente von $\mathcal{B}$ bezeichnen wir mit Paaren von Ordinalzahlen, ohne Klammern und Kommas (Beispiele: $(i, \ell)' = i\ell'$, $(10, 0) = 10\,0$, $(11, \ell) = 11\,\ell$). Wir definieren nun

$$E := k(00) \oplus \left[\bigoplus_{\substack{0 < i < 7 \\ l < \omega_d}}^{\perp} k(il, il') \oplus \bigoplus_{\substack{7 \leq i < \omega_0 \\ l < \omega_d}}^{\perp} k(il) \right]$$

$$\|il\| = \|il'\| = 0 \quad 0 < i < 7, \quad l < \omega_d$$

$$\|00\| = \|il\| = 1 \quad 7 \leq i < \omega_0, \quad l < \omega_d$$

$$\Phi(il, il') = 1 \quad 0 < i < 7, \quad l < \omega_d$$

$$\Phi(00, 1l) = 1 \quad l < \omega_0; \text{ zu den verbleibenden Basisvektoren soll } 00 \text{ senkrecht stehen.}$$

Ferner sei Φ eine symmetrische Bilinearform und k ein kommutativer Körper mit $\text{char}(k) = 0$.

Behauptung: (E, Φ) ist nicht ausgeartet.

Beweis. $x \in E \Rightarrow x = \lambda_0 \cdot 00 + \sum_{\substack{0 < i < 7 \\ l < \omega_d}} (\lambda_{ie} \cdot il + \lambda'_{ie} \cdot il') + \sum_{\substack{7 \leq i < \omega_0 \\ l < \omega_d}} \mu_{il} \cdot il$

Sei $x \perp E$. Daraus folgt:

$$\Phi(x, il) = \mu_{ie} = 0 \quad 7 \leq i < \omega_0, \quad l < \omega_d$$

$$\Phi(x, il') = \lambda_{ie} = 0 \quad 0 < i < 7, \quad l < \omega_d \Rightarrow$$

$$\Phi(x, 00) = \lambda_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi(x, il) = \lambda'_{ie} = 0 \quad 0 < i < 7, \quad l < \omega_d$$

$$\text{Somit: } x \perp E \Rightarrow x = 0.$$

Man verifiziert leicht:

$$\dim E = s_{\omega_d}$$

(E, Φ) ist 1-euklidisch und damit euklidisch.

Sei $F \subset E$. In der ganzen Arbeit bezeichnen wir mit F' immer den kleinsten von einer Teilmenge aus $\mathcal{B}$ erzeugten linearen Raum der F enthält. Im folgenden wichtig: F' ist der lineare Raum, der von den Elementen aus $\mathcal{B}$ erzeugt wird, die bei der Darstellung der Vektoren einer Basis von F in $\mathcal{B}$ auftreten.

Damit gilt

Satz 3. Sei $F \subset E$, so dass $1l' \notin F'$ für $l < \omega_0$.

Dann ist $(F')^{\perp} = F'$.

Beweis. Sei $x \notin F'$ und C die Menge aller Elemente aus $\mathcal{B}$, die in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ vorkommen und nicht in F' liegen. Es existiert ein $l_0 < \omega_0$ mit $1l_0' \notin C$. Sei A der lineare Raum, der erzeugt wird von $C, 00, k(1l_0, 1l_0')$ und allen hyperbolischen Ebenen $k(il, il')$, die ein Element von C enthalten. Sei $a \in A^\perp$.

$$a = \lambda_0 \cdot 00 + \sum_{0 < i < 7, l < \omega_\alpha} (\lambda_{il} il + \lambda'_{il} il') + \sum_{7 \leq i < \omega_0, l < \omega_\alpha} \mu_{il} il \quad (1). \text{ Aus } a \perp A \text{ folgt:}$$

$$\Phi(a, il) = \underline{\mu_{il}} = 0 \quad (2) \quad il \in A, 7 \leq i < \omega_0, l < \omega_\alpha$$

$$\Phi(a, il') = \underline{\lambda_{il}} = 0 \quad (3) \quad il \in A, 0 < i < 7, l < \omega_\alpha (\Rightarrow il' \in A).$$

$$\text{I.) } \lambda_0 = 0 \text{ in (1). } \Rightarrow \Phi(a, il) = \underline{\lambda'_{il}} = 0 \quad (4) \quad il' \in A, 0 < i < 7, l < \omega_\alpha.$$

Wegen $\lambda_0 = 0$ und (2) - (4) tritt in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ kein Vektor aus $A \cap \mathcal{B}$ und deshalb auch kein Vektor aus C auf ($C \subset A \cap \mathcal{B}$). Die Elemente aus C , welche in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ auftreten, kommen also auch in der Darstellung von $x+a$ in $\mathcal{B}$ vor. Damit ist $(x+a) \notin F'$.

II.) $\lambda_0 \neq 0$ in (1). $\Phi(a, 1l_0) = \underline{\lambda_0 + \lambda'_{1l_0}} = 0 \quad (5)$. Wegen $\lambda_0 \neq 0$ und (5) ist $\lambda'_{1l_0} \neq 0$, d.h. $1l_0'$ tritt in (1) auf. In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ kommt $1l_0'$ nicht vor [$1l_0' \notin F'$ (nach Voraussetzung) und $1l_0' \notin C$]. Weil $1l_0'$ in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ auftritt, ist also wieder $(x+a) \notin F'$.

Somit gilt für alle $a \in A^\perp$ $(x+a) \notin F'$. Weil $a \in A^\perp$ und $A^\perp$ wegen $\dim A < \aleph_0$ eine σ_0 -Nullumgebung ist, folgt daraus $x \notin (F')^\perp$ (vgl. Satz 1, p. 10). Also: $x \notin F' \Rightarrow x \notin (F')^\perp$. Kontraposition: $(F')^\perp \subset F'$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Korollar. Sei $F \subset E$, so dass $1l' \notin F'$ für $l < \omega_0$.

Dann gilt (a) $F^\perp \subset F'$ (b) $\bar{F} \subset F'$.

Beweis. (a) $F \subset F' \Rightarrow F^\perp \subset (F')^\perp \Rightarrow F^\perp \subset F'$ (Satz 3).

(b) folgt aus $\bar{F} \subset F^\perp$ und (a).

Satz 4. Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines Sesquilinearraumes (E, Φ) und $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ eine Zerlegung von $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ und $\mathcal{B}_i \perp \mathcal{B}_j$ für alle $i, j \in I, i \neq j$. Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilräumen aus E mit $\sum_{i \in I} V_i \subset \sum_{i \in I} V_i', V_i \subset k(\mathcal{B}_i)$, für alle $i \in I$, dann gilt

$$\overline{\sum_{i \in I} V_i} = \sum_{i \in I} \overline{V_i} \quad \text{für jeden } \sigma_\lambda\text{-Abschluss (s. vgl. p. 9).}$$

Für den σ_0 -Abschluss erhält man

$$\left(\sum_{i \in I} V_i \right)^\perp = \sum_{i \in I} (V_i^\perp).$$

Beweis. a) $\sum_{i \in I} \overline{V_i} \subset \overline{\sum_{i \in I} V_i}$: klar.

$$b) \overline{\sum_{i \in I} V_i} \subset \sum_{i \in I} \overline{V_i} :$$

Sei U eine beliebige σ_λ -Nullumgebung $\Rightarrow U \supset A^\perp, A \subset E$,
 $\dim A < \aleph_\lambda$. Da $E = \sum_{i \in I} k(\mathcal{B}_i)$ kann man A' zerlegen
 in $A' = \sum_{i \in I} A_i$ wobei $A_i = A' \cap k(\mathcal{B}_i)$.

Sei nun $x \in \overline{\sum_{i \in I} V_i}$. Weil $\dim A' < \aleph_\lambda$ ist $A'^\perp$ σ_λ -
 Nullumgebung. Deshalb existiert ein $a \in A'^\perp$ und

$v \in \sum_{i \in I} V_i$ so dass $x + a = v$. $x \in \sum_{i \in I} V_i'$ (nach Voraussetzung)

$\Rightarrow x = \sum_{i \in I} x_i, x_i \in V_i'$. Daraus erhält man $\sum_{i \in I} x_i + a = \sum_{i \in I} v_i$,

$x_i \in V_i', v_i \in V_i \subset V_i'$, und wobei nur für endlich viele $i \in I$ gilt

$x_i \neq 0, v_i \neq 0$. Es ist $a_i := v_i - x_i \in V_i'$ und damit $x_i + a_i = v_i$,

$x_i, a_i \in V_i', v_i \in V_i$ für alle $i \in I$ und $\sum_{i \in I} a_i = a$.

$\sum_{i \in I} a_i \in A'^\perp = \left(\sum_{j \in I} A_j \right)^\perp = \bigcap_{j \in I} (A_j^\perp) \Rightarrow \sum_{i \in I} a_i \in A_j^\perp$ für alle $j \in I$ ①

Sei nun $j \in I$ beliebig aber fest. Für alle $i \in I, i \neq j$, gilt:

$a_i \in V_i' \subset k(\mathcal{B}_i)$ (nach Voraussetzung), $A_j \subset k(\mathcal{B}_j), k(\mathcal{B}_i) \perp k(\mathcal{B}_j)$

$\Rightarrow a_i \in k(\mathcal{B}_i) \subset [k(\mathcal{B}_j)]^\perp \subset A_j^\perp$, also: $a_i \in A_j^\perp$ für alle $i, j \in I, i \neq j$ ②

Aus ① und ② folgt $a_j \in A_j^\perp$ für alle $j \in I$ ③

und aus ② und ③ $a_i \in A_j^\perp$ für alle $i, j \in I$.

Aus der letzten Beziehung erhält man für alle $i \in I$
 $a_i \in \bigcap_{j \in I} (A_j^\perp) = A'^\perp \subset A^\perp \subset U$. Somit: $x_i + a_i = v_i$, $a_i \in U$,
 $v_i \in V_i \Rightarrow x_i \in \overline{V_i} \Rightarrow x = \sum_{i \in I} x_i \in \sum_{i \in I} \overline{V_i} \Rightarrow x \in \sum_{i \in I} \overline{V_i}$.

Also: $x \in \sum_{i \in I} \overline{V_i} \Rightarrow x \in \sum_{i \in I} \overline{V_i}$. Damit ist auch b) bewiesen.

Satz 5. $\mathcal{B}$ sei eine Basis eines Vektorraumes und $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen aus $\mathcal{B}$. Dann gilt
 $\bigcap_{i \in I} k(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i) = k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i)$.

Beweis. $\bigcap_{i \in I} k(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i) = k[\bigcap_{i \in I} (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i)] = k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i)$.

Wir definieren nun Teilräume des Sesquilinearraumes (E, Φ) von Seite 15:

$$V_1 := k(100 + 10\ell + 1\ell)_{0 < \ell < \omega_0}$$

$$V_2 := k(20 + 11\ell)_{\ell < \omega_0}$$

$$V_3 := k(30 + 3i + i\ell)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_\lambda}}$$

$$V_4 := k(40 + 4\ell)_{0 < \ell < \omega_0}$$

$$V_5 := k(50 + 5\ell)_{0 < \ell < \omega_0}$$

$$V_6 := k(60 + 6\ell)_{0 < \ell < \omega_\lambda}$$

$$V_7 := k(70 + 7\ell)_{0 < \ell < \omega_\lambda}$$

$$V_8 := k(80 + 8\ell)_{0 < \ell < \omega_0}$$

$$V_9 := k(50 + 9\ell)_{\ell < \omega_\lambda}$$

$$V_{10} := k(30 + 3i)_{11 < i < \omega_0}$$

Eigenschaften der Teilräume V_i $1 \leq i \leq 10$.

(1) σ_λ -Abschlüsse $\lambda > 0$.

$$\overline{V_i} = V_i$$

$$i = 1, 2, 4, 5, 8, 10$$

$$\overline{V_3} = V_3 + V_{10}$$

$$\overline{V_i} = V_i + k(i0) = V_i'$$

$$i = 6, 7$$

$$\overline{V_9} = V_9 + k(50) = V_9'$$

(2) σ_0 -Abschlüsse.

$$V_1^\perp = V_1$$

$$V_i^\perp = V_i + k(i0) = V_i' \quad i=2, 4 \leq i \leq 8$$

$$V_3^\perp = V_3 + V_{10} + k(30) = V_3'$$

$$V_9^\perp = V_9 + k(50) = V_9'$$

$$V_{10}^\perp = V_{10} + k(30) = V_{10}'$$

(3) Orthogonalsräume.

$$\text{Sei } U_1 := k(\mathcal{B} \setminus \{00, 1e', 100, 10l\}_{0 \leq e < \omega_0})$$

$$W_1 := k(100 - 00, 10l - 1e')_{0 \leq e < \omega_0}$$

$$M_j := \{il' \mid il' \in V_j' \cap \mathcal{B}, 0 < i < 7, l < \omega_\lambda\}$$

$$N_j := \{il' \mid il' \in V_j' \cap \mathcal{B}, 7 \leq i < \omega_0, l < \omega_\lambda\}$$

Damit gilt

$$V_1^\perp = U_1 + W_1$$

$$V_j^\perp = k[\mathcal{B} \setminus (M_j \cup N_j)] \quad 2 \leq j \leq 10$$

Beweis von (1) - (3).(1) σ_λ -Abschlüsse $\lambda > 0$.

$$\bar{V}_i = V_i \quad i=1,2,4,5,8,10: \dim V_i < \aleph_\lambda \Rightarrow \bar{V}_i = V_i \text{ (vgl. p.10, c)}.$$

$$\bar{V}_3 = V_3 + V_{10} \quad \bar{V}_9 = V_9 + k(50) = V_9' \quad \bar{V}_i = V_i + k(i0) = V_i' \quad i=6,7:$$

$$\text{Sei } A \subset E, \dim A < \aleph_\lambda, L := \{l < \omega_\lambda \mid il' \in A' \cap \mathcal{B} \vee il' \in A' \cap \mathcal{B}, 0 < i < \omega_0\}.$$

Weil $\dim A' < \aleph_\lambda$ ist $|L| < \aleph_\lambda$. Deshalb existiert ein

$0 < l_0 < \omega_\lambda$ mit $l_0 \notin L \Rightarrow il_0 \notin A' \wedge il_0' \notin A', 0 < i < \omega_0$. Mit der Definition von E (p.15) folgt daraus $il_0 \perp A'$, also $il_0 \in A^\perp$,

$1 < i < \omega_0$. Da $(30 + 3i) + il_0 \in V_3$, $11 < i < \omega_0$, gilt somit

$[(30+3i)+A^+] \cap V_3 \neq \emptyset \quad 11 < i < \omega_0$. Analog erhält man

$$(50+A^+) \cap V_9 \neq \emptyset$$

$$(i0+A^+) \cap V_i \neq \emptyset \quad i=6,7.$$

Weil $\{A^+ | A \in E \text{ und } \dim A < s_x^*\}$ eine σ_x -Nullumgebungsbasis, folgt

$$(30+3i) \in \bar{V}_3 \quad 11 < i < \omega_0 \Rightarrow V_3 + V_{10} \subset \bar{V}_3 \quad (1)$$

$$50 \in \bar{V}_9 \Rightarrow V_9 + k(50) \subset \bar{V}_9 \quad (2)$$

$$i0 \in \bar{V}_i \quad i=6,7 \Rightarrow V_i + k(i0) \subset \bar{V}_i \quad i=6,7 \quad (3)$$

Es ist $V_3 + V_{10} = V_{10} + k(il)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_x}}$. Mit Satz 2(p.10) und Korollar (b)

$$(p.16) \text{ folgt daraus } \bar{V}_3 \subset \overline{V_3 + V_{10}} = \overline{V_{10} + k(il)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_x}}} =$$

$$\overline{V_{10} + k(il)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_x}}} \subset \bar{V}_{10} + [k(il)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_x}}]' = V_{10} + k(il)_{\substack{11 < i < \omega_0 \\ \ell < \omega_x}} =$$

$$V_3 + V_{10}, \text{ also } \bar{V}_3 \subset V_3 + V_{10} \quad (4). \text{ Aus (1) und (4) folgt } \bar{V}_3 = V_3 + V_{10}.$$

$$\bar{V}_9 \subset V_9' = V_9 + k(50), \text{ also } \bar{V}_9 \subset V_9 + k(50) \quad (5). \text{ Aus (2) und (5)}$$

$$\text{folgt } \bar{V}_9 = V_9 + k(50). \text{ Ebenso zeigt man } \bar{V}_i = V_i + k(i0) \quad i=6,7.$$

(2) σ_0 -Abschlüsse.

$$V_1^{\perp} = V_1:$$

(A) $100 \notin V_1^{\perp}$: $U_0 := k(00, 100)^{\perp}$ ist σ_0 -Nullumgebung.

Annahme: $100 \in V_1^{\perp}$. Dann existieren $a \in U_0$ und $v \in V_1$, so dass

$$100 + a = v, \text{ also } 100 + a = \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} (100 + 10\ell + 1\ell) = \left(\sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} \right) 100 + \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} 10\ell + \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} 1\ell, \quad I \subset \omega_0 \setminus \{0\}, \quad |I| < s_0^* \Rightarrow$$

$$a = \left(\sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} - 1 \right) 100 + \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} 10\ell + \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} 1\ell. \quad a \in U_0 \Rightarrow$$

$$\Phi(00, a) = \sum_{\ell \in I} \left[\lambda_{\ell} \underbrace{\Phi(00, 1\ell)}_1 \right] = \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} = 0 \quad (I)$$

$$\Phi(100, a) = \left(\sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} - 1 \right) \underbrace{\Phi(100, 100)}_1 = \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{\ell \in I} \lambda_{\ell} = 1 \quad (II)$$

① steht im Widerspruch zu ②. Somit gilt ③.

Sei nun $x \in V_1^\perp$. zu zeigen: $x \in V_1$. Aus Korollar (a)

(p. 16) folgt $x = \lambda_0 \cdot 100 + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot 10i + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot 1j$; $I, J \subset \omega_0 \setminus \{0\}$,
 I, J endlich, $I \cup J \neq \emptyset$ wegen ③. $U_1 := k(10i, 1i)_{i \in I \cup J}^\perp$

ist eine σ_0 -Nullumgebung. Es gibt ein $b \in U_1$ und $w \in V_1$,
 so dass $x + b = w$. $w = \sum_{\ell \in L} v_\ell (100 + 10\ell + 1\ell)$, $L \subset \omega_0 \setminus \{0\}$, $|L| < \aleph_0$.

$$x + b = w \Rightarrow \lambda_0 \cdot 100 + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot 10i + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot 1j + b = \left(\sum_{\ell \in L} v_\ell \right) 100 + \sum_{\ell \in L} v_\ell (10\ell + 1\ell) \quad \textcircled{B}.$$

Da $b \in U_1$ kommen die Basisvektoren $10i, 1i$ für $i \in I \cup J$ in
 der Darstellung von b in B nicht vor. Deswegen kann
 die linke Seite der Gleichung ③ nur dann mit der rechten
 Seite übereinstimmen, wenn $J = I$ und $\mu_i = \lambda_i$ für alle $i \in I$.

$$\Rightarrow x = \lambda_0 \cdot 100 + \sum_{i \in I} \lambda_i (10i + 1i). \text{ Sei } c := \sum_{i \in I} \lambda_i (100 + 10i + 1i) \Rightarrow$$

$$x - c = \left(\lambda_0 - \sum_{i \in I} \lambda_i \right) 100. \text{ Wäre } x - c \neq 0, \text{ dann } \lambda_0 - \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0.$$

Weil $(x - c) \in V_1^\perp$ ($c \in V_1$), wäre damit $100 \in V_1^\perp$, was im
 Widerspruch zu ③ steht. Deshalb ist $x = c$, also $x \in V_1$.

Restliche σ_0 -Abschlüsse:

Die Beziehungen $V_i + k(i0) \subset V_i^\perp$ $i = 2, 4 \leq i \leq 8$; $V_9 + k(50) \subset V_9^\perp$;

$V_{10} + k(30) \subset V_{10}^\perp$ beweist man analog wie $V_9 + k(50) \subset V_9^\perp$,

Seite 19/20 (man muss dort $\lambda = 0$ setzen). Die umgekehrten

Inklusionen erhält man mit Korollar (a), Seite 16:

$$V_i^\perp \subset V_i' = V_i + k(i0) \quad i = 2, 4 \leq i \leq 8, \text{ und analog die übrigen.}$$

$$V_3^\perp = V_3 + V_{10} + k(30):$$

$$V_3^\perp \subset V_3' = V_3 + V_{10} + k(30).$$

Umgekehrte Inklusion:

$$V_3 + V_{10} + k(30) = V_3 + V_{10}^\perp \subset (V_3 + V_{10})^\perp = (\overline{V_3})^\perp = V_3^\perp.$$

(3) Orthogonalräume

$$V_1^\perp = U_1 + W_1 \text{ (vgl. p. 19) :}$$

(a) $\underline{U_1 + W_1 \subset V_1^\perp}$. Mit den Definitionen von V_1 (p. 18) und E (p. 15) verifiziert man leicht, dass $U_1 \perp V_1$ und $W_1 \perp V_1$.

(b) $\underline{V_1^\perp \subset U_1 + W_1}$. Sei $x \in V_1^\perp$. zu zeigen: $x \in U_1 + W_1$.

$x = u + v \cdot 00 + \lambda_0 \cdot 100 + \sum_{0 < \ell < \omega_0} (\lambda_\ell \cdot 10\ell + \mu_\ell \cdot 1\ell')$, wobei $u \in U_1$ und höchstens endlich viele λ_ℓ, μ_ℓ von Null verschieden sind. Deshalb existiert ein $\ell_0 < \omega_0$ so dass

$\ell_0 > \max \{ \ell < \omega_0 \mid \ell = 0 \vee \lambda_\ell \neq 0 \vee \mu_\ell \neq 0 \}$. Weil $100 + 10\ell_0 + 1\ell_0 \in V_1$, $10\ell + 1\ell - 10\ell_0 - 1\ell_0 \in V_1$ $0 < \ell < \omega_0$, $x \perp V_1$, $u \perp V_1$ (vgl. (a)), gilt:

$$\Phi(x, 100 + 10\ell_0 + 1\ell_0) = v + \lambda_0 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\Phi(x, 10\ell + 1\ell - 10\ell_0 - 1\ell_0) = \lambda_\ell + \mu_\ell = 0 \quad \textcircled{2} \quad 0 < \ell < \omega_0$$

Aus $\textcircled{1}$ bzw. $\textcircled{2}$ folgt: $\underline{v = -\lambda_0, \mu_\ell = -\lambda_\ell}$.

Damit erhält man

$$x = u + \lambda_0(100 - 00) + \sum_{0 < \ell < \omega_0} \lambda_\ell(10\ell - 1\ell') \Rightarrow \underline{x \in U_1 + W_1}.$$

Um die restlichen Orthogonalräume zu bestimmen, beweisen wir die folgenden Beziehungen $\textcircled{A}$ und $\textcircled{B}$.

$$\textcircled{A} \quad k(il)^\perp = k(\mathcal{B} \setminus \{il'\}) \quad 2 \leq i < 7, \ell < \omega_\alpha :$$

(a) $k(\mathcal{B} \setminus \{il'\}) \subset k(il)^\perp$: klar (vgl. Def. von E , p. 15).

(b) $k(il)^\perp \subset k(\mathcal{B} \setminus \{il'\})$: Sei $x \in k(il)^\perp \Rightarrow x = a + \lambda_\ell il'$, $a \in k(\mathcal{B} \setminus \{il'\})$.

Aus (a) folgt $a \perp il$, und daraus $\Phi(x, il) = \lambda_\ell = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow \underline{x \in k(\mathcal{B} \setminus \{il'\})}$.

$$\textcircled{B} \quad k(il)^\perp = k(\mathcal{B} \setminus \{il\}) \quad 7 \leq i < \omega_0, \ell < \omega_\alpha :$$

Der Beweis verläuft wie in $\textcircled{A}$, man muss dort nur il' durch il ersetzen.

In den folgenden Berechnungen werden die Beziehungen
 ① und ② (p. 22), sowie Satz 5 (p. 18) verwendet (M_j, N_j vgl. p. 19).
 Für $2 \leq j \leq 10$ gilt

$$\begin{aligned} V_j^\perp &= (V_j^{\perp\perp})^\perp = (V_j')^\perp = \left[\sum_{il \in V_j' \cap \mathcal{B}} k(il) \right]^\perp = \bigcap_{il \in V_j' \cap \mathcal{B}} [k(il)^\perp] = \\ &= \bigcap_{il' \in M_j} k(\mathcal{B} \setminus \{il'\}) \cap \bigcap_{il \in N_j} k(\mathcal{B} \setminus \{il\}) = \\ &= k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{il' \in M_j} \{il'\}\right) \cap k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{il \in N_j} \{il\}\right) = k(\mathcal{B} \setminus M_j) \cap k(\mathcal{B} \setminus N_j) = \\ &= k\left[\mathcal{B} \setminus (M_j \cup N_j)\right]. \end{aligned}$$

Wir geben nun ein Modell des Verbandes $\mathcal{V}_{30}$ (vgl. II.1).

Die Räume E, V_i ($1 \leq i \leq 10$), U_1, W_1, M_j, N_j ($2 \leq j \leq 10$)
 sind Seite 15, 18, 19 definiert. Zusätzlich führen wir
 die Abkürzung

$$W_2 := k\left[\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=1}^9 (M_j \cup N_j \cup \{00\})\right] \quad \text{ein.}$$

Wir definieren nun $(1, 4, 1) = V := \bigoplus_{i=1}^9 V_i$.

Damit erhält man die folgenden 30 Verbandselemente:

$$(0,5,0) = (0)$$

$$(1,5,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i$$

$$(1,4,1) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i$$

$$(2,1,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(60)$$

$$(2,1,1) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(60)$$

$$(2,2,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}$$

$$(2,2,1) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}$$

$$(2,3,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}$$

$$(2,3,1) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}$$

$$(2,4,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}$$

$$(2,4,1) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}$$

$$(2,4,2) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 7}$$

$$(2,5,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}$$

$$(2,5,1) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}$$

$$(2,5,2) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 7}$$

$$(3,3,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 6}$$

$$(3,3,1) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 6}$$

$$(3,3,2) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 7}$$

$$(0,6,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 6}$$

$$(1,6,1) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 6}$$

$$(2,6,2) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 7}$$

$$(0,6,3) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 8}$$

$$(0,7,0) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i$$

$$(1,7,1) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i$$

$$(2,7,2) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i \oplus k(70)$$

$$(0,7,3) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i \oplus k(i0)_{7 \leq i \leq 8}$$

$$(0,8,3) = k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=2}^6 M_j\right)$$

$$(2,8,2) = k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=3}^6 M_j\right)$$

$$(1,8,1) = k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=4}^6 M_j\right)$$

$$(0,8,4) = E$$

Beweis.

Zuerst definiert man

$$(0,5,0) := (0), \quad (0,8,4) := E, \quad (1,4,1) := \bigoplus_{i=1}^9 V_i.$$

Aus diesen 3 Verbandselementen berechnen wir die übrigen.

Dabei verwenden wir die Sätze 1-5, die Eigenschaften

(1)-(3) der Teilräume V_i , sowie die Resultate von I. und II.1.

$$\underline{(2,4,2)}. \text{ Mit Satz 2 und (1) folgt: } (2,4,2) := \overline{(1,4,1)} = \overline{\sum_{i=1}^9 V_i} =$$

$$\sum_{i=1}^9 \overline{V_i} = \sum_{i=1}^{10} V_i + k(i0)_{5 \leq i \leq 7} = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 7}.$$

(0,6,3). Mit (2) und Korollar (a) zu Satz 3 erhält man:

$$\sum_{i=2}^9 V_i' = \sum_{i=2}^9 V_i^{\perp} \subset \left(\sum_{i=2}^9 V_i \right)^{\perp} \subset \left(\sum_{i=2}^9 V_i \right)' = \sum_{i=2}^9 V_i' \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=2}^9 V_i \right)^{\perp} = \sum_{i=2}^9 V_i^{\perp} \text{ ①. Aus Satz 4 [mit Korollar (a), p.16], ① und (2) folgt:}$$

$$(0,6,3) := (1,4,1)^{\perp} = \left(\sum_{i=1}^9 V_i \right)^{\perp} = \left(V_1 + \sum_{i=2}^9 V_i \right)^{\perp} = V_1^{\perp} + \left(\sum_{i=2}^9 V_i \right)^{\perp} =$$

$$\sum_{i=1}^9 V_i^{\perp} = \sum_{i=1}^{10} V_i + k(i0)_{2 \leq i \leq 8} = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 8}.$$

(0,7,0). Für lineare Teilräume gilt das modulare Gesetz:

$$A \subset C \Rightarrow (A+B) \cap C = A + (B \cap C). \text{ Daraus sowie mit (3) und}$$

Satz 5 erhält man

$$(0,7,0) := (1,4,1)^{\perp} = \left(\sum_{j=1}^9 V_j \right)^{\perp} = \bigcap_{j=1}^9 V_j^{\perp} = V_1^{\perp} \cap \bigcap_{j=2}^9 V_j^{\perp} =$$

$$V_1^{\perp} \cap \bigcap_{j=2}^9 k[\mathcal{B} \setminus (M_j \cup N_j)] =$$

$$(W_1 + U_1) \cap k\left[\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=2}^9 (M_j \cup N_j)\right] = W_1 + \left(U_1 \cap k\left[\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=2}^9 (M_j \cup N_j)\right] \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & W_1 + \left(k \left[\mathcal{B} \setminus (M_1 \cup N_1 \cup \{00\}) \right] \cap k \left[\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=2}^9 (M_j \cup N_j) \right] \right) = \\
 & W_1 + k \left[\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=1}^9 (M_j \cup N_j \cup \{00\}) \right] = W_1 \oplus W_2.
 \end{aligned}$$

(1,5,0). Es gilt: $(1,5,0) := (1,4,1) \cap (0,7,0) = \left(\bigoplus_{i=1}^9 V_i \right) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right).$

Behauptung: $\left(\bigoplus_{i=1}^9 V_i \right) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i.$

Beweis. (a) $\bigoplus_{i=4}^6 V_i \subset \left(\bigoplus_{i=1}^9 V_i \right) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right) : \text{klar.}$

(b) $\left(\bigoplus_{i=1}^9 V_i \right) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right) \subset \bigoplus_{i=4}^6 V_i :$

Sei $x \in \left(\bigoplus_{i=1}^9 V_i \right) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right).$ Annahme: $x \notin \bigoplus_{i=4}^6 V_i \ (\Rightarrow x \neq 0).$

Aus $x \in \bigoplus_{i=1}^9 V_i$ und der Annahme folgt (unter Verwendung der Definitionen der Räume V_i), dass in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ weder 00 noch $1\ell'$, $0 < \ell < \omega_0$ vorkommt, jedoch mindestens ein $i\ell \in \bigcup_{j=1}^9 N_j$ auftritt (*). $x \in W_1 \oplus W_2 \Rightarrow x = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Aus der Definition von W_1 und $W_1' \cap W_2 = (0)$ folgt: Ist $w_1 \neq 0$, so kommt in der Zerlegung von x in $\mathcal{B}$ 00 oder $1\ell'$ ($0 < \ell < \omega_0$) vor. Somit wegen (*): $w_1 = 0 \Rightarrow x = w_2 \in W_2 \Rightarrow$ In der Zerlegung von x in $\mathcal{B}$ tritt kein $i\ell \in \bigcup_{j=1}^9 N_j$ auf (vgl. Definition von W_2).

Dies steht im Widerspruch zu (*). Also gilt: $x \in \bigoplus_{i=4}^6 V_i.$

Ebenso berechnet man die Verbandselemente $(2,4,0)$ und $(0,6,0)$:

(2,4,0).

$$(2,4,0) := (2,4,2) \cap (0,7,0) = \left[\bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 7} \right] \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}$$

(0,6,0).

$$(0,6,0) := (0,6,3) \cap (0,7,0) = \left[\bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 8} \right] \cap \left(\bigoplus_{i=1}^2 W_i \right) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 6}$$

(2,1,0). $(2,1,0) := \overline{(1,5,0)} = \overline{\sum_{i=4}^6 V_i} = \sum_{i=4}^6 \overline{V_i} = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(60).$

(2,1,1). $(2,1,1) := (1,4,1) + (2,1,0) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i + \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(60) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(60).$

(2,3,0). Mit Satz 4 und (2) erhält man:

$(2,3,0) := (1,5,0)^\perp = \left(\sum_{i=4}^6 V_i \right)^\perp = \sum_{i=4}^6 V_i^\perp = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}.$

(2,2,0). $(2,2,0) := (2,4,2) \cap (2,3,0) = \underbrace{\left[\bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 7} \right]}_X \cap \underbrace{\left[\bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6} \right]}_Y.$

Behauptung: $X \cap Y = Z$, $Z := \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}.$

Beweis. (a) $Z \subset X \cap Y$: klar.

(b) $X \cap Y \subset Z$:

Sei $x \in X \cap Y$. Annahme: $x \notin Z$.

Aus $x \in Y = Z \oplus k(40)$ und $x \notin Z$ folgt: $x = z + \lambda \cdot 40, z \in Z, \lambda \neq 0.$

$\Rightarrow \lambda \cdot 40 = x - z, x \in X, z \in Z \subset X \Rightarrow \frac{40 \in X}{40 \notin X} \left. \vphantom{\frac{40 \in X}{40 \notin X}} \right\} \text{Widerspruch.}$

Somit gilt: $x \in Z$.

(2,2,1). $(2,2,1) := (1,4,1) + (2,2,0) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i + \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6} = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}.$

(2,3,1). $(2,3,1) := (1,4,1) + (2,3,0) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i + \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6} = \bigoplus_{i=1}^9 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6}.$

(2,4,1). $(2,4,1) := (1,4,1) + (2,4,0) = \bigoplus_{i=1}^9 V_i + \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6} =$

$\bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6}.$

$$(2,5,0). \quad (2,5,0) := (2,4,0) + (2,3,0) = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{5 \leq i \leq 6} +$$

$$\bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6} = \bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6} .$$

$$(2,5,1). \quad (2,5,1) := (1,4,1) + (2,5,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 6} .$$

$$(2,5,2). \quad (2,5,2) := (2,4,2) + (2,5,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{4 \leq i \leq 7} .$$

(3,3,0). Mit Satz 4, Satz 3 und (2) erhält man:

$$(3,3,0) := (2,4,0)^{\perp} = (V_4 + V_5' + V_6' + V_{10})^{\perp} = V_4^{\perp} + (V_5')^{\perp} + (V_6')^{\perp} + (V_{10})^{\perp} =$$

$$\bigoplus_{i=4}^6 V_i \oplus V_{10} \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 6} .$$

$$(3,3,1). \quad (3,3,1) := (1,4,1) + (3,3,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 6} .$$

$$(3,3,2). \quad (3,3,2) := (2,4,2) + (3,3,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{3 \leq i \leq 7} .$$

$$(1,6,1). \quad (1,6,1) := (1,4,1) + (0,6,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 6} .$$

$$(2,6,2). \quad (2,6,2) := (2,4,2) + (0,6,0) = \bigoplus_{i=1}^{10} V_i \oplus k(i0)_{2 \leq i \leq 7} .$$

$$(1,7,1). \quad (1,7,1) := (1,4,1) + (0,7,0) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i .$$

$$(2,7,2). \quad (2,7,2) := (2,4,2) + (0,7,0) = \bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i \oplus k(70) .$$

$$(0,7,3). \quad (0,7,3) := (0,6,3) + (0,7,0) =$$

$$\bigoplus_{i=1}^2 W_i \oplus \bigoplus_{i=1}^3 V_i \oplus \bigoplus_{i=7}^9 V_i \oplus k(i0)_{7 \leq i \leq 8} .$$

(0,8,3). Durch Anwendung von (3), (A)(p.22), und Satz 5 erhält man:

$$\begin{aligned} (0,8,3) &:= (0,6,0)^\perp = \left[\sum_{j=4}^6 V_j + V_{10} + \sum_{i=2}^6 k(i0) \right]^\perp = \left[\bigcap_{j=4}^6 V_j^\perp \cap V_{10}^\perp \right] \cap \\ &\bigcap_{i=2}^6 k(i0)^\perp = \left[\bigcap_{j=4}^6 k(\mathcal{B} \setminus M_j) \cap k(\mathcal{B} \setminus M_3) \right] \cap \bigcap_{i=2}^6 k(\mathcal{B} \setminus \{i0'\}) = \\ &k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=3}^6 M_j\right) \cap k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i=2}^6 \{i0'\}\right) = k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=2}^6 M_j\right). \end{aligned}$$

(2,8,2). $k(i0) \subset V_i^\perp, 5 \leq i \leq 6 \Rightarrow V_i^\perp \subset k(i0)^\perp \Rightarrow$
 $V_i^\perp \cap k(i0)^\perp = V_i^\perp, 5 \leq i \leq 6$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} (2,8,2) &:= (2,4,0)^\perp = \left[\sum_{j=4}^6 V_j + \sum_{i=5}^6 k(i0) + V_{10} \right]^\perp = \\ &\left(\bigcap_{j=4}^6 V_j^\perp \cap \bigcap_{i=5}^6 k(i0)^\perp \right) \cap V_{10}^\perp = \bigcap_{j=4}^6 V_j^\perp \cap V_{10}^\perp \stackrel{(*)}{=} k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=3}^6 M_j\right). \end{aligned}$$

(*) vgl. in der Herleitung von (0,8,3).

$$\underline{(1,8,1)}. \quad (1,8,1) := (1,5,0)^\perp = \left(\sum_{j=4}^6 V_j \right)^\perp = \bigcap_{j=4}^6 V_j^\perp \stackrel{(*)}{=} k\left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=4}^6 M_j\right).$$

Inklusionen.

$$(0,6,0) \not\subseteq (0,7,0) : (0,6,0) \subset W_2.$$

$$(0,7,3) \not\subseteq (0,8,3) : (0,7,3) \subset (0,8,3) : \text{klar}$$

$$(0,7,3) \not\supset (0,8,3) : 00 \in (0,8,3), 00 \notin (0,7,3).$$

Die Gültigkeit der übrigen, aus dem Diagramm Seite 13 ersichtlichen Inklusionen $\not\subseteq$, sind einfach zu verifizieren. Damit folgt die Verschiedenheit aller Verbandselemente.

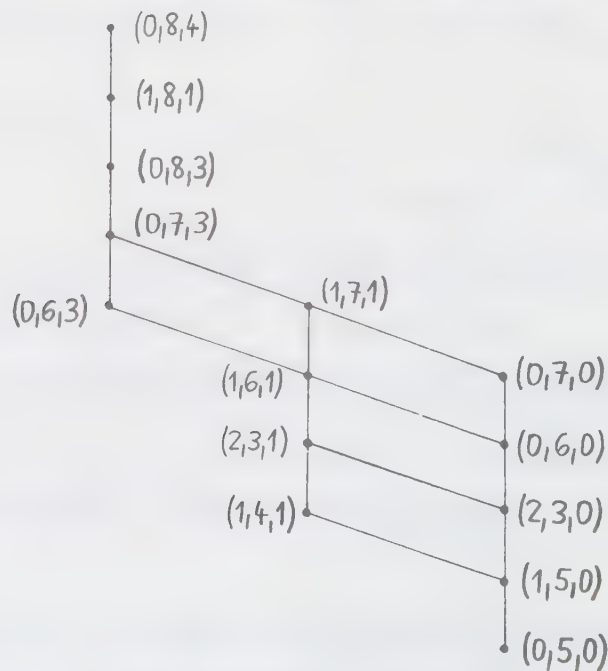
Wir haben also bewiesen, dass der Verband $\mathcal{V}_{30}$ ein Modell in $\mathcal{L}(E)$ besitzt, und damit minimal ist $[(E, \Phi)$ ist sogar euklidisch und nicht nur $\mathcal{L}$ -euklidisch].

III. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{25}$, falls E und V $\perp$ -euklidisch sind (vgl. [1], IV. 6).

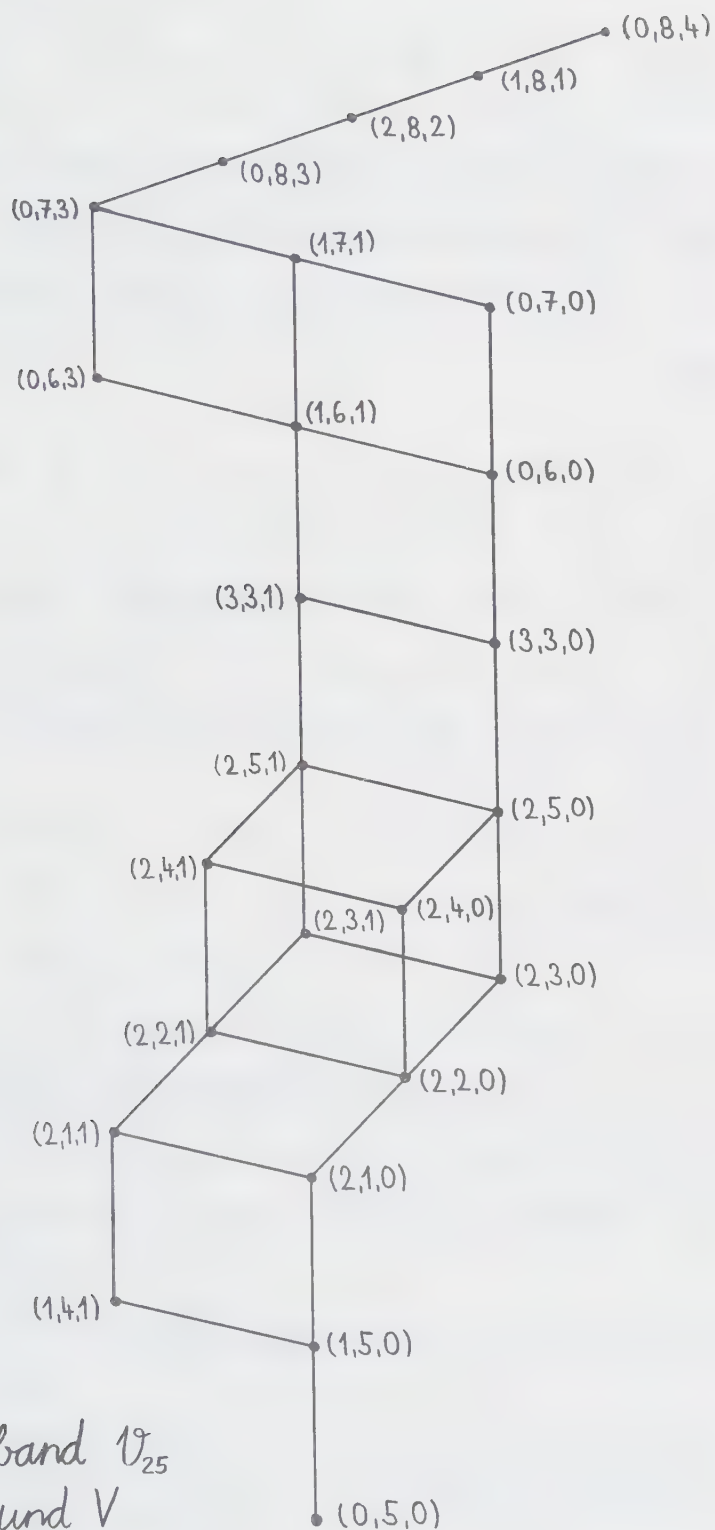
Lässt man (E, Φ) unverändert (vgl. p. 15) und definiert $(1, 4, 1) = V := \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq 7}}^9 V_i$, so wird auch der Teilraum V euklidisch. Die Verbandselemente erhält man in diesem Spezialfall durch Weglassen von V_7 und $k(70)$ in der Tabelle Seite 24. Damit fallen 5 Räume des Verbandes $\mathcal{V}_{30}$ zusammen; es gilt nämlich:
 $(2, 4, 2) = (2, 4, 1)$; $(2, 5, 2) = (2, 5, 1)$; $(3, 3, 2) = (3, 3, 1)$; $(2, i, 2) = (1, i, 1)$ $i=6, 7$.
 Die verbleibenden 25 Verbandselemente sind alle verschieden.

IV. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}_{14}$ von Kaplansky.

Ein Teilraum V eines Sesquilinearraumes (E, Φ) erzeugt mit den Operationen $+$, $\cap$, $\perp$ einen vollständigen Teilverband von $\mathcal{L}(E)$ (vgl. I.3), den Kaplansky-Verband (vgl. [4], I.9; [6]; [9]). Dieser umfasst 14 Elemente:



Der Kaplansky-Verband ist ein Teilverband von $\mathcal{V}_{30}$.



Der Verband $\mathcal{V}_{25}$
falls E und V
 $\mathcal{L}$ -euklidisch.

V. Ein Modell für den Verband $\mathcal{V}(V)$.

V.1 Der Verband $\mathcal{V}(V)$ (vgl. [1]: II. und IV.1).

In diesem Abschnitt beschreiben wir den von einem Teilraum V eines Sesquilinearraumes (E, Φ) unter den Operationen $+$, $\cap$, $\perp$ und $-$ in $\mathcal{L}(E)$ erzeugten Verband $\mathcal{V}(V)$ (vgl. Einleitung).

Definition der Folge $(A_m)_{m < \omega_0}$

Wir definieren zuerst mit vollständiger Induktion eine Folge $(A_m)_{m < \omega_0}$ von Teilmengen des Verbandes $\mathcal{L}(E)$. Die Elemente der Mengen A_m werden mit Tripeln von natürlichen Zahlen bezeichnet.

Definition der Menge A_0

$$\begin{aligned} (0,5,0) &= (0), (0,6,0) = \text{rad}(V^\perp), (0,6,1) = \overline{V + \text{rad}(V^\perp)}, (0,6,2) = \\ &= V^\perp \cap \overline{V + V^\perp}, (0,6,3) = V^\perp, (0,7,0) = V^\perp, (0,7,1) = V^\perp + \overline{V + \text{rad}(V^\perp)}, \\ (0,7,2) &= V^\perp + V^\perp \cap \overline{V + V^\perp}, (0,7,3) = V^\perp + V^\perp, (0,8,0) = \overline{V + V^\perp}, \\ (0,8,1) &= V^\perp + \overline{V + V^\perp}, (0,8,2) = \overline{V^\perp + V^\perp}, (0,8,3) = (V + V^\perp)^\perp, \\ (0,8,4) &= E. \end{aligned}$$

$$A_0 := \{(0,5,0), (0,8,4)\} \cup \{(0,i,k) \mid 6 \leq i \leq 8; 0 \leq k \leq 3\}.$$

Definition der Menge A_1

$$\begin{aligned} (1,4,1) &= V, (1,5,0) = \text{rad } V, (1,6,1) = V + \text{rad}(V^\perp), (1,7,1) = V + V^\perp, \\ (1,8,1) &= (\text{rad } V)^\perp. \end{aligned}$$

$$A_1 := \{(1,4,1), (1,5,0)\} \cup \{(1,i,1) \mid 6 \leq i \leq 8\}.$$

Die Folge $(A_m)_{2 \leq m < \omega_0}$ wird mit vollständiger Induktion definiert.

Definition der Menge A_2

$$\begin{aligned} (2,1,0) &= \overline{\text{rad } V}, (2,1,1) = V + \overline{\text{rad } V}, (2,2,0) = \overline{V} \cap (\text{rad } V)^\perp, (2,2,1) = V + (\text{rad } V)^\perp \cap \overline{V}, \\ (2,3,0) &= (\text{rad } V)^\perp, (2,3,1) = V + (\text{rad } V)^\perp, (2,4,0) = \overline{V} \cap V^\perp, (2,4,1) = V + V^\perp \cap \overline{V}, \\ (2,4,2) &= \overline{V}, (2,5,0) = (\overline{V} \cap V^\perp) + (\text{rad } V)^\perp, (2,5,1) = V + (V^\perp \cap \overline{V}) + (\text{rad } V)^\perp, \\ (2,5,2) &= \overline{V} + (\text{rad } V)^\perp, (2,6,2) = \overline{V} + \text{rad } (V^\perp), (2,7,2) = \overline{V} + V^\perp, (2,8,2) = (\overline{V} \cap V^\perp)^\perp. \\ A_2 &:= \{(2,i,k) \mid 1 \leq i \leq 5; k=0,1\} \cup \{(2,i,2) \mid 4 \leq i \leq 8\}. \end{aligned}$$

Die Mengen A_j seien nun für alle natürlichen Zahlen j mit $2 \leq j < m$ und ein beliebiges m mit $2 < m < \omega_0$ definiert; ihre Elemente sollen wie folgt bezeichnet werden:

$$A_j = \{(j,i,k) \mid 1 \leq i \leq 5; 0 \leq k < j\} \cup \{(j,i,j) \mid 4 \leq i \leq 8\}.$$

Um die Darstellung zu vereinfachen, definieren wir folgende Zuordnung:

$$S_{mi} := \begin{cases} t, & \text{falls } m = t+1 \text{ und } 2 \leq m < \omega_0, 1 \leq i \leq 3 \\ m, & \text{falls } 2 \leq m < \omega_0 \text{ und } i = 4, 5. \end{cases}$$

Definition der Menge A_m

$$m = t+1$$

$$(m,1,0) = \overline{(t,5,0)}$$

$$(m,2,0) = \overline{(t,5,1)} \cap (t,5,0)^\perp$$

$$(m,3,0) = (t,5,0)^\perp$$

$$(m,4,0) = \overline{(t,5,1)} \cap (0,7,0)$$

$$(m,i,k) = \overline{(k,4,k)} + (m,i,0) \quad 1 \leq i \leq 5; 1 \leq k \leq t$$

$$(m,4,m) = \overline{(t,5,1)}$$

$$(m,5,k) = (m,4,k) + (m,3,0) \quad k = 0, m$$

$$(m, i, m) = (m, 4, m) + (0, i, 0) \quad i = 6, 7$$

$$(m, 8, m) = (m, 5, 0)^+$$

$$A_m := \{(m, i, k) \mid 1 \leq i \leq 5; 0 \leq k < m\} \cup \{(m, i, m) \mid 4 \leq i \leq 8\}.$$

In [1] wurde bewiesen, dass $\mathcal{U}(V) = \bigcup_{m < \omega_0} A_m$.

$\mathcal{U}$ erfüllt folgende Bedingungen (1)–(6):

(1) Summen in $\mathcal{U}$

Für alle m mit $2 \leq m < \omega_0$ gilt

$$(m, i, k) = (k, 4, k) + (m, i, 0) \quad 1 \leq i \leq 5; 1 \leq k < m$$

$$(m, 5, k) = (m, 4, k) + (m, 3, 0) \quad k = 0, m$$

Für alle m mit $1 \leq m < \omega_0$ gilt

$$(m, i, m) = (m, 4, m) + (0, i, 0) \quad i = 6, 7$$

$$(0, 7, k) = (0, 6, k) + (0, 7, 0) \quad 1 \leq k \leq 3$$

$$(0, 8, 1) = (0, 6, 3) + (0, 8, 0)$$

(2) Ordnung in $\mathcal{U}$

Die Elemente von $\mathcal{U}$ sind bezüglich der Relation $<$ wie folgt angeordnet:

$$(0, 5, 0) < (1, 5, 0) < (1, 4, 1) < (2, 1, 1) \quad ; \quad (1, 5, 0) < (2, 1, 0)$$

$$(h, 4, h) < (k, 4, k) \quad 0 \leq h < k < \omega_0$$

Für alle m , mit $2 \leq m < \omega_0$ gilt

$$\begin{array}{ll}
 (m, i, k) \subset (m, i+1, k) & i = 1, 2, 4 ; \quad 0 \leq k \leq \delta_{mi} \\
 (m, i, k) \subset (m, i+2, k) & i = 2, 3 ; \quad 0 \leq k \leq \delta_{mi} \\
 (m, i, h) \subset (m, i, k) & 1 \leq i \leq 5 ; \quad 0 \leq h < k \leq \delta_{mi} \\
 (m, 5, k) \subset (m+1, 1, k) & 0 \leq k \leq m \\
 (m, 5, k) \subset (\ell, 5, k) & m < \ell \leq n ; \quad 0 \leq k \leq m \\
 (m, 5, k) \subset (k, 6, k) \subset (k, 7, k) & 0 \leq k \leq m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (0, 6, k) \subset (0, 7, k) \subset (0, 8, 1) & 1 \leq k \leq 3 \\
 (0, 7, 2) \subset (0, 8, k) \subset (0, 8, k+1) \subset (\ell, 8, \ell) \subset (m, 8, m) \subset (0, 8, 4) & \text{für} \\
 0 \leq k \leq 2 ; \quad 1 \leq m < \ell < \omega_0 & \\
 (m, i, m) \subset (\ell, i, \ell) \subset (0, i, k) \subset (0, i, k+1) & \text{für } 0 \leq m < \ell < \omega_0 ; \\
 i = 6, 7 ; \quad k = 1, 2 . &
 \end{array}$$

(3) Durchschnitte in $\mathcal{V}$

$$(1, 5, 0) = (1, 4, 1) \cap (0, 7, 0)$$

Für alle m , mit $2 \leq m < \omega_0$ gilt

$$\begin{array}{ll}
 (m, i, k) = (m, i, \delta_{mi}) \cap (k, 7, k) & 1 \leq i \leq 5 ; \quad 0 \leq k < \delta_{mi} \\
 (m, 2, \delta_{m2}) = (m, 4, m) \cap (m, 3, \delta_{m3}) &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (m, 6, m) = (0, 6, 3) \cap (m, 7, m) & \text{für alle } m, \text{ mit } 0 \leq m < \omega_0 \\
 (0, 6, 1) = (0, 6, 3) \cap (0, 7, 1) & \\
 (0, 6, 2) = (0, 6, 3) \cap (0, 8, 0) & \\
 (0, 7, 2) = (0, 7, 3) \cap (0, 8, 0) &
 \end{array}$$

(4) Orthogonalräume in $\mathcal{V}$

$$(0,5,0)^\perp = (0,8,4)$$

$$(1,5,0)^\perp = (1,8,1)$$

$$(1,4,1)^\perp = (0,7,0)$$

Für alle m mit $2 \leq m < \omega_0$ gilt

$$(m, i, 0)^\perp = (\delta_{mi}, 8, \delta_{mi}) \quad 1 \leq i \leq 5$$

$$(m, i, k)^\perp = (0, 7, 0) \quad 1 \leq i \leq 5 ; 1 \leq k \leq \delta_{mi}$$

$$(0,6,0)^\perp = (0,8,3)$$

$$(0,7,0)^\perp = (0,6,3)$$

$$(0,8,4)^\perp = (0,5,0)$$

Für alle m mit $1 \leq m < \omega_0$ gilt

$$(m, 6, m)^\perp = (0, 6, k)^\perp = (0, 7, 0) \quad 1 \leq k \leq 3$$

$$(m, 7, m)^\perp = (0, 7, h)^\perp = (0, 8, k)^\perp = (0, 6, 0) \quad 1 \leq h \leq 3 ; 0 \leq k \leq 3$$

$$(m, 8, m)^\perp = (m+1, 3, 0)$$

(5) σ_λ -Abschlüsse in $\mathcal{V}$

$$\overline{(0,5,0)} = (0,5,0)$$

$$\overline{(1,4,1)} = (2,4,2)$$

Für alle m mit $2 \leq m < \omega_0$ gilt

$$\overline{(m, i, 0)} = (m, i, 0) \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$\overline{(m, i, k)} = (m, 4, m) \quad i = 1, 2, 4 ; 1 \leq k \leq \delta_{mi}$$

$$\overline{(m, i, k)} = (m+1, 4, m+1) \quad i = 3, 5 ; 1 \leq k \leq \delta_{mi}$$

Für alle m mit $1 \leq m < \omega_0$ gilt

$$\overline{(m, 5, 0)} = (m+1, 1, 0)$$

$$\overline{(m, 6, m)} = (0, 6, 1)$$

$$\overline{(m, 7, m)} = \overline{(0, 7, k)} = \overline{(0, 8, 0)} = (0, 8, 0) \quad k=1, 2$$

$$\overline{(m, 8, m)} = (m, 8, m)$$

$$\overline{(0, 6, k)} = (0, 6, k) \quad 0 \leq k \leq 3$$

$$\overline{(0, 7, 0)} = (0, 7, 0)$$

$$\overline{(0, 7, 3)} = \overline{(0, 8, 1)} = \overline{(0, 8, 2)} = (0, 8, 2)$$

$$\overline{(0, 8, 3)} = (0, 8, 3)$$

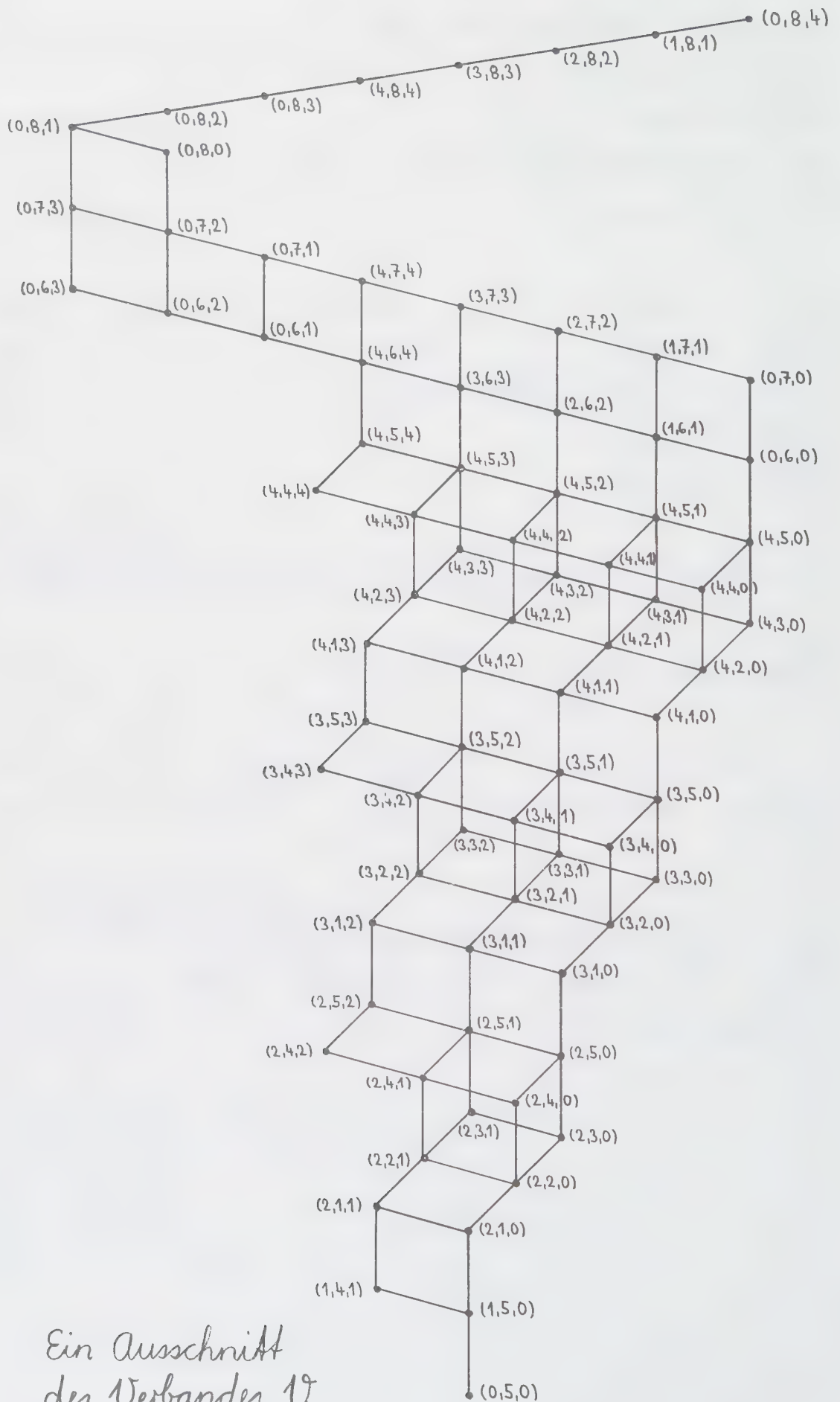
$$\overline{(0, 8, 4)} = (0, 8, 4) \quad .$$

(6) $\mathcal{V}$ ist ein distributiver Teilverband von $\mathcal{L}(E)$.

Beweis von (1)-(6): vgl. [1], II.3.

Zudem haben wir $|\mathcal{V}| = \aleph_0$.

Zur Veranschaulichung zeichnen wir
Seite 38 einen Ausschnitt des
Verbandes $\mathcal{V}$.



Ein Ausschnitt
des Verbandes $\mathcal{V}$.

V.2 Konstruktion eines Modells für den Verband $\mathcal{V}(V)$.

Die Standardbasis des Sesquilinearraumes (E, Φ) wird im folgenden wieder mit $\mathcal{B}$ abgekürzt. Die Elemente von $\mathcal{B}$ bezeichnen wir mit Tripeln von Ordinalzahlen, ohne Klammern und Kommas. Wir definieren ($\alpha=1$)

$$E := \left[\bigoplus_{0 < j < \omega_0} k(0j1) \oplus \bigoplus_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} k(ij0, ij0') \right] \oplus \bigoplus_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} k(ij1)$$

$$\|ijl\| = \|ijl'\| = l \quad \forall ijl, ijl' \in \mathcal{B}$$

$$\Phi(ij0, ij0') = 1 \quad 0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$$

$$\Phi(011, 1j0) = 1 \quad 0 < j < \omega_0$$

$$\Phi(0i1, ij0) = 1 \quad i = 2, 3, \quad 0 < j < \omega_1.$$

k sei ein überabzählbarer, kommutativer Körper.

$I := \{\alpha_n \mid 3 < n < \omega_0\}$ und $J := \{\beta_{ij} \mid 3 < i < \omega_1, j < \omega_1^4\}$ seien disjunkte Teilmengen von k mit $\alpha_n + \beta_{ij} \neq 0$, für alle $\alpha_n \in I, \beta_{ij} \in J$. Wir setzen nun

$$\Phi(0n1, ij0) = (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} \text{ für } 3 < n < \omega_0, 3 < i < \omega_1, j < \omega_1^4.$$

Zu den verbleibenden Basisvektoren soll $0j1, 0 < j < \omega_0$ senkrecht stehen.

Φ sei eine symmetrische Bilinearform.

Weil $\dim E = \aleph_1$, bezeichnet — im folgenden stets den σ_1 -Abschluss.

Behauptung: (E, Φ) ist nicht ausgeartet.

Beweis.

$$x \in E \Rightarrow x = \sum_{0 < j < \omega_0} v_j 0j1 + \sum_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} (\lambda_{ij} ij0 + \lambda'_{ij} ij0') + \sum_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} \mu_{ij} ij1$$

Sei $x \perp E$. Daraus folgt:

$$\Phi(x, ij1) = \underline{\mu_{ij}} = 0$$

$$\Phi(x, ij0') = \underline{\lambda_{ij}} = 0$$

$$\Phi(x, 0j1) = \underline{\nu_j} = 0$$

$$\Phi(x, ij0) = \underline{\lambda'_{ij}} = 0$$

$$\text{Somit: } x \perp E \Rightarrow x = 0.$$

$$0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$$

$$0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4 \Rightarrow$$

$$0 < j < \omega_0 \Rightarrow$$

$$0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$$

Satz 6.

$$\text{Sei } M := \{ij0 \in \mathcal{B} \mid 3 < i < \omega_1, j < \omega_1^4\}$$

und $F \subset E$, so dass

$$0n1 \notin F' \text{ f\"ur } 3 < n < \omega_0,$$

$$ij0' \notin F' \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq 3, 0 < j < \omega_0,$$

$$ij0' \notin F' \text{ f\"ur } ij0 \in M_0 \subset M, |M_0| = \aleph_0.$$

$$\text{Dann ist } (F')^\perp = F'.$$

Beweis. Sei $x \notin F'$ und C die Menge aller Elemente aus $\mathcal{B}$, die in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ auftreten und nicht in F' liegen. Nach Voraussetzung existieren 3 Basisvektoren $ij_i0' \notin F' \cup C, 1 \leq i \leq 3, 0 < j_i < \omega_0$, sowie $P \subset \{ij0' \in \mathcal{B} \mid ij0 \in M \wedge ij0' \notin F' \cup C\}$ mit $|C| < |P| < \aleph_0$.

A sei der lineare Raum, der erzeugt wird von C , $k(ij_i0, ij_i0')_{1 \leq i \leq 3, 0 < j_i < \omega_0}$, $k(ij0, ij0')_{ij0' \in P}$ und allen hyperbolischen Ebenen $k(ij0, ij0')$, die ein Element von C enthalten. Sei $a \in A^\perp$.

$$a = \sum_{0 < i < \omega_0} \nu_i 0i1 + \sum_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} (\lambda_{ij} ij0 + \lambda'_{ij} ij0') + \sum_{\substack{0 < i < \omega_1^4 \\ j < \omega_1^4}} \mu_{ij} ij1 \quad (1)$$

Aus $a \perp A$ folgt:

$$\Phi(a, ij1) = \underline{\mu_{ij}} = 0 \quad (2)$$

$$\Phi(a, ij0') = \underline{\lambda_{ij}} = 0 \quad (3)$$

$$ij1 \in A, 0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$$

$$ij0 \in A, 0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4 (\Rightarrow ij0' \in A).$$

$$\text{Sei } \mathcal{B}_1 := \{0n1 \in \mathcal{B} \mid 3 < n < \omega_0\} \cup \{ij0' \in \mathcal{B} \mid 3 < i < \omega_1, j < \omega_1^4\}.$$

$$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1, C_i := C \cap \mathcal{B}_i \quad i = 1, 2.$$

1. Fall : $C_2 \neq \emptyset$.

I.) $v_i = 0$ in ①, $1 \leq i \leq 3$. $\Rightarrow \Phi(a, ij0) = \lambda'_{ij} = 0$ ④ $ij0' \in A (\Rightarrow ij0 \in A)$, $1 \leq i \leq 3 \vee \omega_1 \leq i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$. Wegen $v_i = 0$ für $1 \leq i \leq 3$ und ①-④ tritt in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ kein Vektor aus $A \cap \mathcal{B}_2$ und deshalb kein Vektor aus C_2 auf ($C_2 \subset A \cap \mathcal{B}_2$). Die Elemente aus C_2 , welche in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ auftreten, kommen also auch in der Darstellung von $x+a$ in $\mathcal{B}$ vor. Damit ist $(x+a) \notin F'$.

II.) $v_{i_0} \neq 0$ in ①, für ein $1 \leq i_0 \leq 3$. $\Phi(a, i_0 j_{i_0} 0) = v_{i_0} + \lambda'_{i_0 j_{i_0}} = 0$ ⑤ $i_0 j_{i_0} 0 \in A$. Wegen $v_{i_0} \neq 0$ und ⑤ ist $\lambda'_{i_0 j_{i_0}} \neq 0$, d.h. $i_0 j_{i_0} 0'$ tritt in ① auf. In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ kommt $i_0 j_{i_0} 0'$ nicht vor (nach Voraussetzung ist $i_0 j_{i_0} 0' \notin F' \cup C$). Weil aber $i_0 j_{i_0} 0'$ in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ auftritt, ist wieder $(x+a) \notin F'$.

2. Fall : $C_2 = \emptyset$.

Weil nach Voraussetzung $C_1 \cup C_2 = C \neq \emptyset$, ist damit $C_1 = C \neq \emptyset$. Sei $N := \{n \mid 3 < n < \omega_0 \wedge 0n1 \notin C\}$. $N \neq \emptyset$.

I.) $v_{n_0} \neq 0$ in ①, für ein $n_0 \in N$, oder $\lambda'_{i_0 j_0} \neq 0$ in ①, für ein $i_0 j_0 0' \in P$. $0n_01, i_0 j_0 0' \notin F' \cup C$ ($0n_01 \notin F'$ nach Voraussetzung) $\Rightarrow 0n_01$ und $i_0 j_0 0'$ treten in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ nicht auf. Weil aber nach Voraussetzung $0n_01$ oder $i_0 j_0 0'$ in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ vorkommen, ist $(x+a) \notin F'$.

II.) $v_n = 0$ in ①, $n \in N$, und $\lambda'_{ij} = 0$ in ①, $ij0' \in P$.

Sei $L := \{n \mid 3 < n < \omega_0 \wedge v_n \neq 0 \text{ in } ①\}$. Wegen II.) ist $\{0n1 \mid n \in L\} \subset C \Rightarrow |L| < |P|$ ⑥ (nach Voraussetzung ist $|C| < |P|$).

Annahme : $L \neq \emptyset$. Daraus folgt mit ①, Voraussetzung II.), den Definitionen von L und P :

$$\Phi(a, ij0) = \sum_{n \in L} v_n \Phi(0n1, ij0) = \sum_{n \in L} v_n (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} = 0 \quad ⑦$$

für alle $ij0' \in P$ ($a \in A^+$, $ij0 \in A$; $3 < i < \omega_1$). I und J seien die auf Seite 39 definierten Teilmengen von k . Für n verschiedene Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aus I und n verschiedene

Elemente $\beta_1, \dots, \beta_n$ aus $\mathcal{I}$ ist die Determinante $\det((\alpha_i + \beta_j)^{-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \prod_{i < j} (\beta_i - \beta_j) \prod_{i, j} (\alpha_i + \beta_j)^{-1}$ ungleich Null (vgl. [4], p. 24).

Weil zudem ⑥ gilt, besitzt das Gleichungssystem ⑦ nur die triviale Lösung: $v_n = 0, \forall n \in L$. Dies steht im Widerspruch zur Def. von L . Unsere Annahme ist also falsch, d.h. es gilt $v_n = 0$ ⑧ $3 < n < \omega_0$.
 $\Rightarrow \Phi(a, ij0) = \lambda'_{ij} = 0$ ⑨ $ij0' \in C$ ($ij0' \in C \Rightarrow ij0' \in A, C = C_1 \Rightarrow 3 < i < \omega_1$). Aus ⑧, der Definition von C_1 und $C_1 = C$ folgt $v_n = 0$ ⑩ $0n1 \in C$. Wegen ①, ②, ③, ⑨, ⑩ und $C \subset A$ tritt in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ kein Vektor aus C auf. Wie auf Seite 41 oben [1. Fall, I)] folgt daraus $(x+a) \notin F'$. Der Schluss des Beweises verläuft wie auf Seite 16.

Korollar. (a) $F \subset E$ erfülle die Bedingungen von Satz 6. Dann gilt $F^\perp \subset F'$.

(b) Sei $F \subset E$. Dann ist $\overline{F'} = F'$ und damit $\overline{F} \subset F'$.

Beweis. (a) vgl. p. 16.

(b) Sei $F \subset E$, $\mathcal{B}_0 := \{0n1 \mid 3 < n < \omega_0\} \cup \{ij0' \in \mathcal{B} \mid 1 \leq i \leq 3, 0 < j < \omega_0\} \cup \{ij0' \in \mathcal{B} \mid ij0' \in M_0 \subset M, |M_0| = \aleph_0\}$ (Def. von M : vgl. Satz 6), $F_0 := k[(F' \cap \mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}_0]$. $F_0 = F'_0$ erfüllt die in Satz 6 für F formulierten Bedingungen $\Rightarrow (F_0)^\perp = F_0$ (Satz 6) $\Rightarrow \overline{F_0} = F_0$ ①. Da $|\mathcal{B}_0| = \aleph_0$, ist $F' = F_0 \oplus G$, $\dim G < \aleph_1$ ②. Aus ① und ② folgt (vgl. [2]): $\overline{F_0 + G} = F_0 + G$, also $\overline{F'} = F'$.

Satz 7. M sei wie in Satz 6 (p. 40) definiert und $X \subset E$, so dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ gilt: Die Darstellung von x in $\mathcal{B}$ enthält mindestens ein $ij0 \in M$, aber kein $0n1 \in \mathcal{B}$ ($0 < n < \omega_0$). Ferner sei $U := X \oplus Y$, $Y \subset N := k[\mathcal{B} \setminus (M \cup \{0n1 \mid 0 < n < \omega_0\})]$, $Y = Y'$, $X' \cap Y = (0)$. Dann ist $\overline{U} = U$.

Beweis (indirekt). Annahme: Es existiert ein $u \in \overline{U} \setminus U$. Sei $B := k(0n1)_{3 < n < \omega_0}$. Da $u \in \overline{U}$ und $B^\perp$ eine $\mathcal{B}_1$ -Nullumgebung ist, existiert ein $b \in B^\perp$ und $u_1 \in U$, so dass $u + b = u_1$.

Weil $u \notin U$, ist $b \neq 0$. C sei die Menge aller Elemente aus $\mathcal{B}$, die in der Darstellung von b in $\mathcal{B}$ auftreten.

Ferner sei A der lineare Raum, der erzeugt wird von C und allen hyperbolischen Ebenen $k(ij0, ij0')$, die ein Element von C enthalten. Es gilt also $b \in A = A'$. Wegen $b = u_1 - u$ und $u_1, u \in \bar{U}$ ist auch $b \in \bar{U}$. Da zudem $(A+B)^\perp$ eine σ_1 -Nullumgebung ist, gibt es ein $a \in (A+B)^\perp$ und ein $u_2 \in U$, so dass $a+b = u_2$. $b \in \bar{U} \Rightarrow b \in U'$ (Korollar(b) zu Satz 6, p.42) $\Rightarrow b \in (X \oplus Y)' = X' \oplus Y' = X' \oplus Y$ (nach Voraussetzung) $\Rightarrow b = b_1 + b_2$, $b_1 \in X'$, $b_2 \in Y$. $b_1 \neq 0$, da sonst $b \in U$ und mit $u = u_1 - b$ auch $u \in U$, was im Widerspruch zur Annahme steht. $b_1 + b_2 \in X' \oplus Y' \Rightarrow$ Alle Vektoren aus $\mathcal{B}$, die in der Darstellung von b_1 in $\mathcal{B}$ auftreten, kommen auch in der Darstellung von $b_1 + b_2$ in $\mathcal{B}$ vor. Weil $b_1 + b_2 \in A'$, liegen diese Basisvektoren alle in A' . Deshalb gilt $b_1 \in A' = A$.

Wegen $a = u_2 - b$ und $u_2, b \in \bar{U}$ ist $a \in \bar{U} \Rightarrow a \in U' \Rightarrow a = a_1 + a_2$, $a_1 \in X'$, $a_2 \in Y$. Wir stellen a in $\mathcal{B}$ dar (vgl. ①, p.40). $a \in U' \Rightarrow$ In ① (p.40) ist $v_i = 0$ für $0 < i < \omega_0$ ($0i1 \notin U'$). Wegen $a \in A'$, $v_i = 0$ in ① und ②-④ (p.40), tritt in der Darstellung von a in $\mathcal{B}$ kein Vektor aus $A \cap \mathcal{B}$ auf. Mit $X' \cap Y' = (0)$ vererbt sich diese Eigenschaft auf a_1 . Da $b_1 \in A = A'$ kommen deswegen die in der Darstellung von b_1 in $\mathcal{B}$ auftretenden Elemente aus $\mathcal{B}$ auch in der Darstellung von $a_1 + b_1$ in $\mathcal{B}$ vor $\Rightarrow a_1 + b_1 \neq 0$. $a_1 + b_1 = (a+b) - (a_2 + b_2)$, $(a+b) \in U$, $(a_2 + b_2) \in U \Rightarrow a_1 + b_1 \in U = X \oplus Y$. Andererseits ist $a_1 + b_1 \in X'$ und $X' \cap Y' = (0)$. Damit folgt $a_1 + b_1 \in X$.

Wir erhalten also: $x := a_1 + b_1 \in X \setminus \{0\}$ ①.

Wegen den Voraussetzungen über X kann x wie folgt dargestellt werden: $x = y + z$, wobei $y = \sum_{ij0 \in L \subset M} \lambda_{ij} ij0$, $|L| < s_{X_0}$, und die Darstellung von z in $\mathcal{B}$ kein $ij0 \in M$ und kein $0n1 \in \mathcal{B}$ ($0 < n < \omega_0$)

enthält. Daraus folgt mit der Definition von E : $z \perp B$.

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in B^\perp \Rightarrow (a+b) \in B^\perp \\ a_2+b_2 \in Y \Rightarrow (a_2+b_2) \in B^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow (a+b) - (a_2+b_2) = (a_1+b_1) = x \in B^\perp.$$

$$x, z \in B^\perp \Rightarrow y \in B^\perp. \quad 0n1 \in B, y \in B^\perp \Rightarrow$$

$$\Phi(0n1, y) = \sum_{ij0 \in L} \lambda_{ij} (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} = 0, \text{ für alle } 3 < n < \omega_0 \quad (2).$$

I und J seien die auf Seite 39 definierten

Teilmengen von k . Für irgend n Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aus I und n Elemente $\beta_1, \dots, \beta_n$ aus J ist die Determinante $\det((\alpha_i + \beta_j)^{-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \prod_{i < j} (\beta_i - \beta_j) \prod_{ij} (\alpha_i + \beta_j)^{-1}$ ungleich Null (vgl. [4], p. 24).

Deshalb besitzt das Gleichungssystem (2) nur die triviale Lösung: $\lambda_{ij} = 0, \forall ij0 \in L. \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$

Die Darstellung von x in B enthält kein $ij0 \in M$.

Aus $x \in X \setminus \{0\}$ (vgl. (1)) und den Voraussetzungen über X folgt aber das Gegenteil. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch.

Satz 8. M sei wie in Satz 6 (p. 40) definiert und $V \subset E$, so dass $k(c + ij0)_{ij0 \in N} \subset V$, unendliche Teilmenge von M .

Dann ist $c \in V^\perp$.

Beweis. Sei $A \subset E$, $\dim A < \aleph_0$, $B := \{n | 3 < n < \omega_0 \wedge 0n1 \in A' \cap B\}$, $C := \{ij0 \in N | ij0' \notin A' \cap B\}$. Weil $\dim A' < \aleph_0$, ist B endlich und C unendlich. Deswegen existiert $D \subset C$, so dass $|D| = |B| + 1$. I und J seien wieder die auf Seite 39 definierten Teilmengen von k , $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ irgend $n-1$ Werte aus I und $\beta_1, \dots, \beta_n$ n Elemente aus J . Dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} (d_1 + \beta_1)^{-1} & \dots & (d_1 + \beta_j)^{-1} & \dots & (d_1 + \beta_n)^{-1} \\ (d_2 + \beta_1)^{-1} & \dots & (d_2 + \beta_j)^{-1} & \dots & (d_2 + \beta_n)^{-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (d_{n-1} + \beta_1)^{-1} & \dots & (d_{n-1} + \beta_j)^{-1} & \dots & (d_{n-1} + \beta_n)^{-1} \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \quad 45$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1 + \beta_1} & \dots & \frac{1}{d_1 + \beta_j} & \dots & \frac{1}{d_1 + \beta_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{d_{n-1} + \beta_1} & \dots & \frac{1}{d_{n-1} + \beta_j} & \dots & \frac{1}{d_{n-1} + \beta_n} \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

Subtrahieren der letzten Spalte von allen übrigen:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1 + \beta_1} - \frac{1}{d_1 + \beta_n} & \dots & \frac{1}{d_1 + \beta_j} - \frac{1}{d_1 + \beta_n} & \dots & \frac{1}{d_1 + \beta_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{d_{n-1} + \beta_1} - \frac{1}{d_{n-1} + \beta_n} & \dots & \frac{1}{d_{n-1} + \beta_j} - \frac{1}{d_{n-1} + \beta_n} & \dots & \frac{1}{d_{n-1} + \beta_n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

Entwickeln nach der letzten Zeile:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta_n - \beta_1}{(d_1 + \beta_1)(d_1 + \beta_n)} & \dots & \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{(d_1 + \beta_{n-1})(d_1 + \beta_n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\beta_n - \beta_1}{(d_{n-1} + \beta_1)(d_{n-1} + \beta_n)} & \dots & \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{(d_{n-1} + \beta_{n-1})(d_{n-1} + \beta_n)} \end{vmatrix} =$$

Aus jeder Zeile i den Faktor $\frac{1}{(d_i + \beta_n)}$

aus allen Spalten j den Faktor $(\beta_n - \beta_j)$ ausklammern:

$$\frac{\prod_{j < n} (\beta_n - \beta_j)}{\prod_{i < n} (\alpha_i + \beta_n)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1 + \beta_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{n-1} + \beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

Die letzte Determinante in ein Produkt verwandeln (vgl. [4], p. 24):

$$\frac{\prod_{j < n} (\beta_n - \beta_j)}{\prod_{i < n} (\alpha_i + \beta_n)} \cdot \frac{\overbrace{\prod_{i < j < n} (\alpha_i - \alpha_j)}^{\text{Zähler fällt weg für } n=2} \prod_{i < j < n} (\beta_i - \beta_j)}{\prod_{i, j < n} (\alpha_i + \beta_j)} \neq 0 \quad \text{Also:}$$

$$\det \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1)^{-1} & \cdots & (\alpha_1 + \beta_n)^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{n-1} + \beta_1)^{-1} & \cdots & (\alpha_{n-1} + \beta_n)^{-1} \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Deshalb besitzt das Gleichungssystem ①

$$\textcircled{1} \begin{cases} \sum_{ij \in D} \lambda_{ij} (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} = 0, \quad \forall n \in B \\ \sum_{ij \in D} \lambda_{ij} = 1 \end{cases}$$

genau ein Lösungstupel $(\lambda_{ij})_{ij \in D}$ (Falls $B = \emptyset$ fallen die Gleichungen der 1. Zeile von ① weg, und man erhält $\lambda_{ij} = 1, ij \in D, |D| = 1$). Mit $a := \sum_{ij \in D} \lambda_{ij} ij$ kann ① wie folgt geschrieben werden:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \Phi(0n1, a) = 0, \quad \forall n \in B \\ \sum_{ij \in D} \lambda_{ij} = 1 \end{cases}$$

Damit ist $a \perp k(0n1)_{n \in B}$. Daraus folgt $\underbrace{a \perp A'}_{\text{gilt auch wenn } B = \emptyset}$, denn es gilt

$a \in k(C) \perp k[(A' \cap \mathcal{B}) \setminus \{0n1 \mid n \in B\}]$ (vgl. Definition von B, C, E, M). Weil $\sum_{ij0 \in D} \lambda_{ij} = 1$ und $D \subset N$ erhält man

$$c + a = \left(\sum_{ij0 \in D} \lambda_{ij} \right) c + \sum_{ij0 \in D} \lambda_{ij} ij0 = \sum_{ij0 \in D} \lambda_{ij} (c + ij0) \in V$$

(nach Voraussetzung), $a \in A'^{\perp} \subset A^{\perp}$. Also: Zu jeder σ_0 -Nullumgebung $A^{\perp}$ gibt es ein $a \in A^{\perp}$, so dass $c + a \in V \Rightarrow c \in V^{\perp}$.

Satz 9. Sei $V \subset E$, so dass $k(b + ij\ell)_{ij\ell \in H} \subset V$,
 $H \subset \{ij0 \in \mathcal{B} \mid \omega_1 \leq i < \omega_1^4, j < \omega_1^4\} \cup \{ij1 \in \mathcal{B} \mid 0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4\}$,
 $|H| \geq \aleph_{\lambda}$, $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$.

Dann gilt: $b \in \overline{V}^{\sigma_{\lambda}}$.

Dabei bezeichne $\overline{V}^{\sigma_{\lambda}}$ den σ_{λ} -Abschluss von V (also für $\lambda = 0$: $b \in \overline{V}^{\sigma_0} = V^{\perp}$).

Beweis. Sei $A \subset E$, $\dim A < \aleph_{\lambda}$,
 $L := \{ij\ell \in H \mid ij\ell, ij0' \notin A' \cap \mathcal{B}\}$. Weil $\dim A' < \aleph_{\lambda}$ und $|H| \geq \aleph_{\lambda}$ ist $L \neq \emptyset$. Sei $rst \in L$. Mit den Definitionen von L, H und E verifiziert man, dass $rst \perp A'$ und damit $rst \in A^{\perp}$ ist. Da $b + rst \in V$, folgt daraus $(b + A^{\perp}) \cap V \neq \emptyset$. Weil $A^{\perp}$ eine σ_{λ} -Nullumgebung ist, gilt also $b \in \overline{V}^{\sigma_{\lambda}}$.

Satz 10.

Ⓐ $k(ij0)^{\perp} = k(\mathcal{B} \setminus \{ij0'\})$ $\omega_1 \leq i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$.

Ⓑ $k(ij0')^{\perp} = k(\mathcal{B} \setminus \{ij0\})$ $0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$.

Ⓒ $k(ij1)^{\perp} = k(\mathcal{B} \setminus \{ij1\})$ $0 < i < \omega_1^4, j < \omega_1^4$.

① Sei $V := \left[\sum_{ij0 \in I} k(ij0) \right]^\perp$,

$$W := k \left[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in I\} \cup \{0n1 \mid 3 < n < \omega_0\}) \right],$$

I unendliche Teilmenge von M (Definition von M vgl. Satz 6, p. 40).

Dann ist $V = W$.

Beweis. ①. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von ① auf Seite 22; man muss dort nur il bzw. il' durch $ij0$ bzw. $ij0'$ ersetzen (Definition von E vgl. p. 39).

②. Vertausche $ij0$ und $ij0'$ im Beweis von ①.

③. Ersetze im Beweis von ① $ij0$ und $ij0'$ durch $ij1$.

④. (a) $W \subset V$: klar (vgl. Definition von E).

(b) $V \subset W$: Sei $x \in V \Rightarrow x = a + \sum_{ij0 \in J} \lambda_{ij} ij0' + \sum_{n \in N} \mu_n 0n1$, $a \in W$; J, N endlich, $J \subset I$, $N \subset \{n \mid 3 < n < \omega_0\}$.

Sei $A := \{ij0 \in I \mid ij0 \notin J\}$. Weil J endlich und I unendlich, ist A unendlich. Deshalb existiert $B \subset A$ mit $|B| = |N|$.

Nach (a) ist $a \in V$. Daraus folgt $\Phi(a, ij0) = 0$, $\forall ij0 \in I$ ①.

Da $B \perp \{ij0' \mid ij0 \in J\}$, gilt $\Phi\left(\sum_{ij0 \in J} \lambda_{ij} ij0', b\right) = 0 \quad \forall b \in B$ ②.

Weil $x \in V$ ist zusätzlich $\Phi(x, ij0) = 0 \quad \forall ij0 \in I$ ③.

Aus ①-③ erhält man $\Phi(x, ij0) = \sum_{n \in N} \mu_n (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} = 0$, $\forall ij0 \in B$. Daraus folgt (vgl. p. 42) $\mu_n = 0$, $\forall n \in N$ ④.

Also mit ① und ④: $\Phi(x, ij0) = \lambda_{ij} = 0$, $\forall ij0 \in J \Rightarrow$

$x = a \Rightarrow x \in W$. Somit: $x \in V \Rightarrow x \in W$.

Satz 11. $(H_i)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}$ seien Familien von Teilräumen aus E , so dass $(H_i' + P_i') \cap (H_j' + P_j') = (0)$, für alle $i, j \in I, i \neq j$.

Ferner sei $L := \left(\sum_{i \in I} H_i \right) \cap \left(\sum_{i \in I} P_i \right), R := \sum_{i \in I} (H_i \cap P_i)$.

Dann gilt $L = R$.

Beweis. a) $R \subset L$: klar.

b) $L \subset R$: Sei $x \in L \Rightarrow x = \sum_{i \in I} h_i = \sum_{i \in I} p_i$ ①, wobei $h_i \in H_i, p_i \in P_i$ für alle $i \in I$ (nur für endlich viele $i \in I$ ist $h_i, p_i \neq 0$). Weil $h_i, p_i \in H_i' + P_i'$ und $(H_i' + P_i') \cap (H_j' + P_j') = (0)$ für alle $i \neq j$, muss wegen ① und der Eindeutigkeit der Zerlegung von x in $\mathcal{B}$ gelten: $h_i = p_i$ und damit $h_i \in (H_i \cap P_i)$ für alle $i \in I$. Daraus folgt $x = \sum_{i \in I} h_i \in R$. Also: $x \in L \Rightarrow x \in R$.

Für den Rest dieser Arbeit gelten die folgenden Abkürzungen und Schranken:

$$\alpha < \omega_1^2; \omega_1^2 + \omega_0 \cdot \alpha < \beta < \omega_1^2 + \omega_0(\alpha + 1); \omega_1 \cdot \beta < \gamma < \omega_1(\beta + 1);$$

$$\sim \text{ ist eine Bijektion: } \omega_1^4 \longrightarrow \omega_1$$

$$\gamma \longmapsto \tilde{\gamma}$$

$$n < \omega_0; p < 6; \alpha := \omega_1(p+1) + n; 0 < \iota < \omega_1; \omega_0 \cdot \iota < \lambda < \omega_0(\iota + 1);$$

$$\omega_1 \cdot \iota < \Lambda < \omega_1(\iota + 1); 0 < \mu < \omega_0; \omega_1 \cdot \mu < \nu < \omega_1(\mu + 1); \varphi := \omega_0^p(n+1);$$

$$g := \omega_0^{2p+1} \cdot (n+1) + 1; \tau := \omega_0^{2p+2} \cdot n + 1; t := \omega_0^{2p+2} \cdot n + n;$$

$$r := \begin{cases} \omega_0^{2p+1} \cdot (n+1) + n & \text{falls } p = 0, 1, 4, 5 \\ \omega_0^{2p+1} \cdot (n+1) + n + 1 & \text{falls } p = 2, 3 \end{cases}$$

Abweichungen von diesen Definitionen werden stets vermerkt.

Behauptung: (a) $\beta < \omega_1^3$ (b) $\gamma < \omega_1^4$

Beweis. (a) $\beta < \omega_1^2 + \omega_1 \cdot \omega_1^2 = \omega_1^3$
 (b) Aus (a) folgt: $\gamma < \omega_1 \cdot \omega_1^3 = \omega_1^4$.

Damit gilt für die reservierten Größen von Seite 49: $\alpha, \beta, \dots, r < \omega_1^4$.
 Deshalb können wir folgende Teilräume und Teilmengen des Sesquilinearraumes (E, Φ) von Seite 39 definieren:

$A_i := k(\iota \alpha 0 + \iota \beta 0 + \iota \gamma 1 + \iota+1 \tilde{\gamma} 0)$ [α, ι durchlaufen unab-
 hängig ihren Definitions-
 $B_i := k(\iota \alpha 0 + \iota \beta 0 + \iota \gamma 1)$ bereich. Für jedes feste α durch-
 läuft β das volle zugewiesene β -Inter-
 $C_i := k(\iota \alpha 0 + \iota \beta 0)$ vall und für jedes feste β γ wiederum]

$$\left. \begin{array}{ll} D_r := \sum_{i=g}^{r-1} A_i + B_r & r > g \\ E_r := \sum_{i=g}^{r-1} A_i + C_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dasselbe} \\ p \text{ und } n \\ \text{für } r, g, t, \tau \Rightarrow \\ g=g(r), \tau=\tau(t) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} D_t := \sum_{i=\tau}^{t-1} A_i + B_t & t > \tau \\ E_t := \sum_{i=\tau}^{t-1} A_i + C_t \end{array} \right\}$$

$p = 0, 2 :$

$$\begin{aligned} F_{np} &:= k(\alpha 00 + \alpha \iota 0 + g \iota 0 + \alpha \lambda 1 + \tau \lambda 0) \\ J_{np} &:= k(\alpha 00 + \alpha \iota 0 + g \iota 0 + \alpha \lambda 1) + C_g \\ H_{np} &:= k(\alpha 00 + \alpha \iota 0 + g \iota 0) \\ I_{np} &:= k(\alpha 00 + \alpha \iota 0) \end{aligned}$$

$p = 1, 3 :$

$$\begin{aligned} L_{np} &:= k(\alpha 00 + \alpha \iota 1 + g \iota 0) \\ Q_{np} &:= k(\alpha 00 + g \mu 0 + \alpha \nu 1 + \tau \nu 0) \\ F_{np} &:= L_{np} + Q_{np} \\ J_{np} &:= L_{np} + k(\alpha 00 + g \mu 0 + \alpha \nu 1) + C_g \\ H_{np} &:= k(\alpha 00 + g \mu 0) \end{aligned}$$

$$p = 4, 5 : \quad F_{np} := k(x_{01} + x_{11} + g_{10})$$

$$H_{np} := k(x_{01} + x_{11})$$

$$p = 1, 3, 4, 5 : \quad I_{np} := k(x_{00} + x_{11})$$

$$n = 0 \quad p = 0, 1 : \quad G_{0p} := J_{0p}$$

$$p = 2, 3 : \quad G_{0p} := I_{0p}$$

$$p = 4 : \quad G_{04} := H_{03}$$

$$p = 5 : \quad G_{05} := H_{05}$$

$$n = 1 \quad p = 0, 1 : \quad G_{1p} := F_{1p} + B_r + C_t \quad (r = g, t = \tau)$$

$$p = 2, 3 : \quad G_{1p} := F_{1p} + E_r + B_t \quad (r = g+1, t = \tau)$$

$$p = 4 : \quad G_{14} := F_{14} + C_r \quad (r = g)$$

$$p = 5 : \quad G_{15} := F_{15} + B_r \quad (r = g)$$

$$1 < n < \omega_0 \quad p = 0, 1 : \quad G_{np} := F_{np} + D_r + E_t$$

$$p = 2, 3 : \quad G_{np} := F_{np} + E_r + D_t$$

$$p = 4 : \quad G_{n4} := F_{n4} + E_r$$

$$p = 5 : \quad G_{n5} := F_{n5} + D_r$$

Hier durchläuft λ für jedes i sein zuge-
 schriebenes Intervall $]\omega_0 i, \omega_0(i+1)[$ (p. 49);
 hier durchläuft λ alle
 solchen λ -Intervalle.

$$V_1 := k(101 + 1\mu 1 + 1\mu 0)$$

$$V_2 := k(201 + 2\iota 1 + 2\iota 0 + 7\lambda 0) + k(7\lambda 0')$$

$$V_i := k(i01 + i\iota 1 + i\iota 0) \quad 3 \leq i \leq 5$$

$$V_6 := k(5\iota 0 + 6\lambda 0) + k(6\lambda 0')$$

$$V_7 := k(501 + 5\iota 1)$$

$$V_8 := k(401 + 4\iota 1)$$

$$V_9 := k(301 + 3\iota 1)$$

$$V_{10} := k(201 + 2\iota 1 + 7\lambda 0)$$

$$V_{11} := k(101 + 1\mu 1)$$

$$V_{12} := k(201 + 2\iota 1 + 2\iota 0)$$

$$V_{13} := k(201 + 2\iota 1)$$

$$V_{14} := k(201 + 2\iota 1 + 2\iota 0 + 7\lambda 0)$$

$$V_{15} := k(5\iota 0 + 6\lambda 0)$$

$$R := k(4\iota 1 + 4\iota 0)$$

$$S := k(401) + V'_5 + k(i\lambda 0, i\lambda 0')_{i=6,7} + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G'_{np}$$

$$T := R + S$$

$$\text{Sei } \delta := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 1 \\ 1 & \text{falls } i = 2, 3 \end{cases}$$

Damit definieren wir:

$$U_i := k(\mathcal{B} \setminus \{0i1, ih0', ij1 \mid 0 < h < \omega_\delta, j < \omega_\delta\}) \quad i = 1, 2, 3$$

$$U_4 := k(\mathcal{B} \setminus \{0j1, 4\iota 0', 4\iota 1 \mid 3 < j < \omega_0\})$$

$$W_i := k(i01 - 0i1, ih1 - ih0')_{0 < h < \omega_\delta} \quad i = 1, 2, 3$$

$$W_4 := k(4\iota 1 - 4\iota 0')$$

Wir definieren noch folgende Teilmengen von $\mathcal{B}$:

$$M_0 := \{0\mu 1\}$$

$$M_1 := \{ij1 \in \mathcal{B} \mid ij1 \in \bigcup_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G'_{np} \cup \bigcup_{k=1}^5 V'_k\}$$

$$M_2 := \{ij0 \in \mathcal{B} \mid ij0' \in V_2 \cup V_6\} = \{i\lambda 0\}_{i=6,7}$$

$$M_3 := \{ij0' \in \mathcal{B} \mid ij0' \in \bigcup_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G'_{np} \cup \bigcup_{k=1}^6 V'_k\}$$

Die Teilräume und Teilmengen von Seite 50-52 werden in der ganzen nun folgenden Arbeit nur im definierten Sinn verwendet.

Eigenschaften der Teilräume.

(1) σ_1 - Abschlüsse.

$$\begin{array}{ll}
 C_l \subset \bar{B}_l & \\
 \bar{H}_{np} = H_{np} & p = 1, 3 \\
 \bar{H}_{np} = H'_{np} & p = 4, 5 \\
 H_{np} \subset \bar{J}_{np} & p < 4 \\
 \bar{I}_{np} = I'_{np} & p < 6 \quad ; \quad \overline{H_{np} + I_{np}} = H'_{np} + I'_{np} \quad p = 1, 3 \\
 \bar{V}_i = V_i & i = 1, 3, 11, 12 \\
 \bar{V}_i = V'_i & i = 7, 8, 9, 13
 \end{array}$$

(2) σ_0 - Abschlüsse.

$$\begin{array}{llll}
 \left. \begin{array}{l} C_l^\perp = C'_l \\ B_l^\perp = B'_l \end{array} \right\} 3 < l < \omega_1 & \begin{array}{l} D_r^\perp = D'_r \\ D_t^\perp = D'_t \end{array} & \begin{array}{l} E_r^\perp = E'_r \\ E_t^\perp = E'_t \end{array} \\
 H_{np}^\perp = H'_{np} & p = 1, 3 & ; & J_{np}^\perp = J'_{np} \quad p < 4 \\
 G_{np}^\perp = G'_{np} & & & \\
 V_k^\perp = V_k & k = 1, 3, 12 & & \\
 V_{12} \subset V_2^\perp & & & \\
 401 \in V_4^\perp & & & \\
 (V_5 + V_6)^\perp = V'_5 + V'_6 & & & \\
 V_i^\perp = V'_i & i = 10, 11 & & \\
 T^\perp = T & & &
 \end{array}$$

(3) Orthogonalräume.

$$S^\perp = k \left[\mathcal{B} \setminus \left(\{0m1 \mid 3 < m < \omega_0\} \cup \{ij1 \mid ij1 \in S\} \cup \{ij0 \mid ij0' \in S\} \cup \{ij0' \mid ij0 \in S\} \right) \right]$$

$$\begin{array}{ll}
 V_k^\perp = U_\varepsilon + W_\varepsilon & k = 1, 3, 12 \\
 R^\perp = U_4 + W_4 &
 \end{array}
 \quad \varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 1 \\ 2 & \text{falls } k = 12 \\ 3 & \text{falls } k = 3 \end{cases}$$

Beweis von (1) - (3).(1) σ_1 -Abschlüsse.

$$C_i \subset \bar{B}_i :$$

Sei $b_{\alpha\beta} := \alpha 0 + \beta 1$. Mit den Definitionen von B_i, C_i (p.50) erhält man $b_{\alpha\beta} \in C_i, k(b_{\alpha\beta} + \gamma 1) \in B_i$ und daraus mit Satz 9 (p.47) : $b_{\alpha\beta} \in \bar{B}_i$. Da $(b_{\alpha\beta})$ eine Basis von C_i ist, folgt : $C_i \subset \bar{B}_i$.

$$\bar{H}_{np} = H_{np} \quad p=1,3 \quad ; \quad \bar{V}_i = V_i \quad i=1,11 : \\ \dim H_{np} < s_1^X \Rightarrow \bar{H}_{np} = H_{np} \text{ (vgl. p.10, c)}. \text{ Ebenso für } V_i.$$

$$\bar{H}_{np} = H'_{np} \quad p=4,5 \quad ; \quad \bar{I}_{np} = I'_{np} \quad p < 6 \quad ; \quad \bar{V}_i = V'_i \quad i=7,8,9,13 : \\ \text{Mit Satz 9 und den Definitionen von } H_{np}, I_{np} \text{ (p.50,51)} \\ \text{erhält man } x01 \in \bar{H}_{np}, x00 \in \bar{I}_{np}. \text{ Daraus folgt} \\ H_{np} + k(x01) \subset \bar{H}_{np}, I_{np} + k(x00) \subset \bar{I}_{np}, \text{ also } H'_{np} \subset \bar{H}_{np}, \\ I'_{np} \subset \bar{I}_{np}. \Rightarrow \bar{H}_{np} = H'_{np}, \bar{I}_{np} = I'_{np} \text{ mit Korollar (b), p.42.} \\ \bar{V}_i = V'_i \text{ beweist man analog.}$$

$$H_{np} \subset \bar{J}_{np} \quad p < 4 :$$

beweist man wie $C_i \subset \bar{B}_i$ mit den Definitionen von H_{np}, J_{np} (p.50) und Satz 9.

$$\bar{V}_i = V_i \quad i=3,12 :$$

Seite 58 wird bewiesen, dass $V_i^{\perp\perp} = V_i \quad i=3,12$. Weil $\bar{V}_i \subset V_i^{\perp\perp}$ gilt also : $\bar{V}_i = V_i$.

$$\begin{aligned} H_{np} + I_{np} &= H'_{np} + I'_{np} \quad p=1,3 : \\ H'_{np} + I'_{np} &= [H_{np} + k(x00)] + I'_{np} = H_{np} + [I'_{np} + k(x00)] = \\ H_{np} + I'_{np} &= H_{np} + \bar{I}_{np} \subset \overline{H_{np} + I_{np}} \Rightarrow H'_{np} + I'_{np} \subset \overline{H_{np} + I_{np}} \Rightarrow \\ \overline{H_{np} + I_{np}} &= H'_{np} + I'_{np} \text{ (Korollar (b), p.42).} \end{aligned}$$

(2) σ_0 -Abschlüsse.

$$C_l^{\perp\perp} = C_l' \quad 3 < l < \omega_1 :$$

Mit der Definition von C_l und Satz 8 (p.44) erhält man $0 \in C_l^{\perp\perp}$. Daraus folgt $C_l' \subset C_l^{\perp\perp}$ und mit Korollar (a), p.42: $C_l^{\perp\perp} = C_l'$.

$$B_l^{\perp\perp} = B_l' \quad 3 < l < \omega_1 :$$

$$\left. \begin{array}{l} C_l' = C_l^{\perp\perp} \\ C_l \subset \bar{B}_l \subset B_l^{\perp\perp} \text{ (vgl. (1), p.53)} \end{array} \right\} \Rightarrow C_l' \subset B_l^{\perp\perp} \Rightarrow B_l + C_l' \subset B_l^{\perp\perp} \Rightarrow B_l' \subset B_l^{\perp\perp} \Rightarrow B_l^{\perp\perp} = B_l' \text{ (Korollar (a), p.42)}.$$

$$D_r^{\perp\perp} = D_r' :$$

zuerst zeigen wir durch vollständige Induktion, dass für ein beliebiges r mit $r > 9$ ($\Rightarrow n > 0$) gilt:

$$B_{r-m}' \subset D_r^{\perp\perp} \quad 9 \leq r-m \leq r \quad (\text{vgl. p. 49, 50}).$$

$$m=0: \quad \left. \begin{array}{l} B_r' = B_r^{\perp\perp} \Rightarrow B_r' = B_r^{\perp\perp} \\ B_r \subset D_r \Rightarrow B_r^{\perp\perp} \subset D_r^{\perp\perp} \end{array} \right\} \Rightarrow B_r' \subset D_r^{\perp\perp}.$$

Induktionsannahme: $B_{r-m_0}' \subset D_r^{\perp\perp}$ für ein m_0 mit $9 < r-m_0 \leq r$.

Behauptung: $B_{r-(m_0+1)}' \subset D_r^{\perp\perp}$

$$\text{Beweis:} \quad B_l' = B_l^{\perp\perp} \Rightarrow B_{r-m_0-1}' = B_{r-m_0-1}^{\perp\perp} \quad \textcircled{1}.$$

Aus den Definitionen von A_l und B_l (p.50) erhält man

$$B_{r-m_0-1} \subset A_{r-m_0-1} + B_{r-m_0}'. \text{ Daraus folgt } B_{r-m_0-1}^{\perp\perp} \subset (A_{r-m_0-1} + B_{r-m_0}')^{\perp\perp} \quad \textcircled{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{r-m_0-1} \subset D_r \text{ (vgl. } D_r, \text{ p.50)} \\ B_{r-m_0}' \subset D_r^{\perp\perp} \text{ (Induktionsannahme)} \end{array} \right\} \Rightarrow (A_{r-m_0-1} + B_{r-m_0}')^{\perp\perp} \subset D_r^{\perp\perp} \quad \textcircled{3}.$$

Aus ①-③ folgt die Behauptung.

$$\text{Also gilt:} \quad \left. \begin{array}{l} B_i' \subset D_r^{\perp\perp} \quad 9 \leq i \leq r \\ \text{Nach Def. von } D_r: A_i \subset D_r \quad 9 \leq i \leq r-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=9}^{r-1} A_i + \sum_{i=9}^r B_i' \subset D_r^{\perp\perp} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=9}^{r-1} \underbrace{(A_i + B_i')}_{A_i'} + B_r' \subset D_r^{\perp\perp} \Rightarrow D_r' \subset D_r^{\perp\perp} \Rightarrow D_r^{\perp\perp} = D_r' \text{ (Korollar (a), p.42)}.$$

$$E_r^{\perp} = E_r' :$$

Zuerst zeigt man wieder durch vollständige Induktion, dass für ein beliebiges r mit $r > g$ gilt:

$$B_{r-m}' \subset E_r^{\perp} \quad g \leq r-m \leq r-1 \quad \textcircled{A}.$$

$$m=1 : \quad \left. \begin{array}{l} A_{r-1} + C_r \subset E_r \Rightarrow A_{r-1} + C_r^{\perp} \subset E_r^{\perp} \\ C_r^{\perp} = C_r' \Rightarrow C_r^{\perp} = C_r' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{A_{r-1} + C_r'}_{B_{r-1}'} \subset E_r^{\perp} \Rightarrow B_{r-1}^{\perp} + C_r' \subset E_r^{\perp} \Rightarrow B_{r-1}' + C_r' \subset E_r^{\perp} \quad \textcircled{B}.$$

$$B_{r-1}' + C_r' \text{ (vgl. Definitionen p.50)}$$

Der Rest des Induktionsbeweises verläuft analog wie bei $D_r^{\perp} = D_r'$.

Aus $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ und der Definition von E_r erhält man also:

$$A_i + B_i' + C_r' \subset E_r^{\perp} \quad g \leq i \leq r-1 \Rightarrow E_r' \subset E_r^{\perp} \Rightarrow E_r^{\perp} = E_r' \quad (\text{vgl. p.55 unten}).$$

$$D_t^{\perp} = D_t' \quad ; \quad E_t^{\perp} = E_t' :$$

Diese Beziehungen beweist man analog zu $D_r^{\perp} = D_r'$, $E_r^{\perp} = E_r'$.

$$H_{np}^{\perp} = H_{np}' \quad p=1,3 :$$

Mit Satz 8 (p.44) und der Definition von H_{np} (p.50) erhält man $\infty 00 \in H_{np}^{\perp}$. Daraus folgt $H_{np}' \subset H_{np}^{\perp}$ und mit Korollar (a), p.42: $H_{np}^{\perp} = H_{np}'$.

$$J_{np}^{\perp} = J_{np}' \quad p < 4 :$$

Aus $C_i' = C_i^{\perp}$ und $C_g \subset J_{np}$ folgt $C_g' = C_g^{\perp} \subset J_{np}^{\perp}$, also

$$C_g' \subset J_{np}^{\perp} \quad \textcircled{I}. \text{ Da } H_{np} \subset \bar{J}_{np} \text{ (vgl. (1), p.53), ist } H_{np}^{\perp} \subset J_{np}^{\perp} \quad \textcircled{II}.$$

$$\textcircled{I} \text{ und } \textcircled{II} : H_{np}^{\perp} + C_g' \subset J_{np}^{\perp} \quad \textcircled{III}.$$

Für die folgenden Ausführungen werden die Definitionen der Teilräume C_g , H_{np} , I_{np} , J_{np} (p.50, 51), sowie die Inklusion $\textcircled{III}$ verwendet.

$p = 0, 2$:

$I_{np} \subset H_{np} + C'_s \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow I_{np} \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow \bar{I}_{np} \subset J_{np}^{\perp}$. Mit (1) (p.53) folgt daraus $I'_{np} \subset J_{np}^{\perp}$ (V). Also mit (III) und (IV):
 $\underbrace{J_{np} + C'_s + H_{np} + I'_{np}}_{J'_{np} \text{ (vgl. p.50)}} \subset J_{np}^{\perp}$. Somit $J'_{np} \subset J_{np}^{\perp}$, und mit Korollar (a), p.42: $J_{np}^{\perp} = J'_{np}$.

$p = 1, 3$:

$H_{np}^{\perp} = H'_{np}$ (vgl. (2), p.53) in (III) eingesetzt liefert $H'_{np} + C'_s \subset J_{np}^{\perp}$ (V).
 $I_{np} \subset J_{np} + C'_s \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow \bar{I}_{np} \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow I'_{np} \subset J_{np}^{\perp}$ (VI). Aus (V) und (VI):
 $J_{np} + I'_{np} + C'_s + H'_{np} \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow J'_{np} \subset J_{np}^{\perp} \Rightarrow J_{np}^{\perp} = J'_{np}$ (Korollar (a), p.42).

$G_{np}^{\perp} = G'_{np}$:

$n = 0$.

$p = 2, 3$: Mit der Definition von G_{op} (p.51), (1) (p.53), und Satz 6 (p.40) erhält man $G_{op}^{\perp} = I_{op}^{\perp} = \bar{I}_{op}^{\perp} = I'_{op} = I'_{op} = G'_{op}$, also $G_{op}^{\perp} = G'_{op}$. $p = 5$: Beweis analog. $p = 4$: $G_{o_4}^{\perp} = G'_{o_4}$ folgt direkt aus (2).

$p = 0, 1$: $G_{op}^{\perp} = J_{op}^{\perp} = J'_{op} = G'_{op}$ (vgl. (2)).

$0 < n < \omega_0$.

Aus den Definitionen auf Seite 50 folgt: $C'_s \subset B'_s, D'_r, E'_r$ ($C'_s \subset A'_s \subset D'_r, E'_r$), $C'_t \subset B'_t, D'_t, E'_t$. Daraus erhält man mit den Definitionen von G_{np} und den Beziehungen (2):
 $C'_s + C'_t \subset G_{np}^{\perp}$ $p < 4$ (A), $C'_s \subset G_{np}^{\perp}$ $p = 4, 5$ (B).
 (zum Beispiel gilt für $n = 1$ und $p = 0, 1$: $C'_s + C'_t \subset B'_r + C'_t$ ($s = r, t = t$) $= B'_r + C'_t \subset G_{1p}^{\perp}$; oder für $1 < n < \omega_0$ und $p = 0, 1$: $C'_s + C'_t \subset D'_r + E'_t = D'_r + E'_t \subset G_{np}^{\perp}$).

$p < 4$:

Mit den Definitionen auf den Seiten 49-51 und (A) erhält man $J_{np} \subset (F_{np} + C'_t) + C'_s \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow J_{np}^{\perp} \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow J'_{np} \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow$

$F_{np} + J'_{np} \subset G_{np}^{\perp}$. Daraus folgt mit $F'_{np} \subset F_{np} + J'_{np} : F'_{np} \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow G'_{np} \subset G_{np}^{\perp}$ (zum Beispiel gilt für $n=1 \wedge p=0,1$: $F'_{1p} + B_r^{\perp} + C_t^{\perp} \subset G_{1p}^{\perp} \Rightarrow F'_{1p} + B_r' + C_t' \subset G_{1p}^{\perp} \Rightarrow G'_{1p} \subset G_{1p}^{\perp} \Rightarrow G_{np}^{\perp} = G'_{np}$).

$p=4,5$:

Aus den Definitionen auf Seite 50, 51 und (1) (p. 53) folgt:

$$\left. \begin{array}{l} F'_{np} \subset H'_{np} + C'_g = \overline{H}_{np} + C'_g \\ H_{np} \subset F_{np} + C'_g \Rightarrow \overline{H}_{np} + C'_g \subset (F_{np} + C'_g)^{\perp} \\ \text{Mit } \textcircled{B} \text{ (p. 57): } F_{np} + C'_g \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow (F_{np} + C'_g)^{\perp} \subset G_{np}^{\perp} \end{array} \right\} \Rightarrow F'_{np} \subset G_{np}^{\perp} \Rightarrow G_{np}^{\perp} = G'_{np} \text{ (vgl. } p < 4 \text{)}.$$

$$V_k^{\perp} = V_k \quad k=1,3,12 :$$

Der Beweis verläuft wie derjenige für $V_1^{\perp} = V_1$ auf Seite 20, 21; man muss dort nur

100	ersetzen durch	801
10l	" "	8l1
1l	" "	8l0
1l'	" "	8l0'
00	" "	081

Falls $k=3,12$ muss zusätzlich ω_0 überall durch ω_1 ersetzt werden. ε sei wie auf Seite 53 unten definiert.

$$V_{12} \subset V_2^{\perp} :$$

Sei $C_l := 201 + 2l1 + 2l0$. Mit den Definitionen von V_2, V_{12} (p. 51) erhält man $C_l \in V_{12}$, $k(C_l + 7\lambda 0) \in V_2$ und daraus mit Satz 8 (p. 44): $C_l \in V_2^{\perp}$. Weil (C_l) eine Basis von V_{12} ist, folgt: $V_{12} \subset V_2^{\perp}$.

$$401 \in V_4^{\perp} :$$

Sei $A \subset E$, $\dim A < \aleph_0$, $N := \{ \iota \mid 4\iota 1 \in A^{\perp} \cap \mathcal{B} \}$. Aus den Definitionen von ι (p. 49), E (p. 39) und $\dim A' < \aleph_0$ folgt: N ist unendlich.

Sei $V := k(401 + 4\iota 0)_{\iota \in N}$. Nach Satz 8 (p. 44) ist $401 \in V^{\perp}$.

Da $A^\perp$ eine σ_0 -Nullumgebung ist, existiert deshalb ein $a \in A^\perp$ und ein $v \in V$, so dass $401 + a = v$. $v \in V \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{l \in N} \lambda_l (401 + 4l0) \Rightarrow 401 + a + \sum_{l \in N} \lambda_l 4l1 = v + \sum_{l \in N} \lambda_l 4l1 = \\ \sum_{l \in N} \lambda_l (401 + 4l1 + 4l0) &\in V_4 \quad (V_4 \text{ vgl. p. 51}) \Rightarrow 401 + b \in V_4, b := a + \sum_{l \in N} \lambda_l 4l1. \\ a \in A^\perp, 4l1 \in A^\perp, l \in N (\text{vgl. } N) \} &\Rightarrow b \in A^\perp \subset A^\perp. \text{ Also: } 401 + b \in V_4, b \in A^\perp \Rightarrow \\ &(401 + A^\perp) \cap V_4 \neq \emptyset \Rightarrow 401 \in V_4^\perp. \end{aligned}$$

$$(V_5 + V_6)^\perp = V_5' + V_6' :$$

Weil $k(5l0 + 6l0) \in V_6$, ist nach Satz 8 $5l0 \in V_6^\perp \Rightarrow$

$$V_6' = V_6 + k(5l0) \subset V_6^\perp, \text{ also } V_6' \subset V_6^\perp \Rightarrow V_6^\perp = V_6' \quad (1).$$

Mit (1) (p. 53) und Satz 6 (p. 40) erhält man $V_7^\perp = \overline{V_7}^\perp = V_7'^\perp =$

V_7' , also $V_7^\perp = V_7' \quad (2)$. Aus (1), (2) und den Definitionen auf

Seite 51 folgt: $V_5' = V_5 + V_7' = V_5 + V_7^\perp \subset (V_5 + V_7)^\perp \subset [V_5 + k(5l0)]^\perp \subset$

$$(V_5 + V_6')^\perp = (V_5 + V_6^\perp)^\perp \subset (V_5 + V_6)^\perp \Rightarrow V_5' \subset (V_5 + V_6)^\perp \Rightarrow$$

$$V_5' + V_6' = V_5' + V_6^\perp \subset (V_5 + V_6)^\perp \Rightarrow V_5' + V_6' \subset (V_5 + V_6)^\perp. \text{ Andererseits}$$

gilt wegen Korollar (a), p. 42 $(V_5 + V_6)^\perp \subset V_5' + V_6'$. Also:

$$(V_5 + V_6)^\perp = V_5' + V_6'.$$

$$V_{10}^\perp = V_{10}' :$$

Setze im Beweis von $V_{12} \subset V_2^\perp$ (p. 58) $c_l := 201 + 2l1$ und ersetze

V_{12}, V_2 durch V_{13}, V_{10} . Man erhält damit $V_{13} \subset V_{10}^\perp$, also

$$\text{mit Satz 6 und (1)} \quad \left. \begin{aligned} V_{13}' &= V_{13}^\perp = \overline{V_{13}}^\perp = V_{13}^\perp \subset V_{10}^\perp \Rightarrow V_{13}' \subset V_{10}^\perp \\ V_{10} + V_{13}' &= V_{10}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$V_{10}' = V_{10} + V_{13}' \subset V_{10}^\perp \Rightarrow V_{10}' \subset V_{10}^\perp \Rightarrow V_{10}^\perp = V_{10}'.$$

$$V_{11}^\perp = V_{11}' :$$

Mit Satz 9 (p. 47) folgt: $101 \in V_{11}^\perp \Rightarrow V_{11} + k(101) = V_{11}' \subset V_{11}^\perp \Rightarrow$
 $V_{11}^\perp = V_{11}'.$

$$T^\perp = T :$$

Definitionen: vgl. p. 49, 52.

Sei $t_0 \in T^\perp$. zu zeigen: $t_0 \in T$.

$$t_0 \in T^\perp \Rightarrow t_0 \in T' = R' + S' = R' + S \Rightarrow t_0 = \sum_{i \in I} (\lambda_i 4i1 + \mu_i 4i0) + s$$

wobei $|I| < \aleph_0$, $s \in S$ und $\lambda_i, \mu_i = 0$ sein dürfen ($0 < i < \omega_1$). Sei

$A := k(4i1, 4i0')_{i \in I}$. Weil $t_0 \in T^\perp$ und $A^\perp$ wegen $\dim A < \aleph_0$ eine σ_0 -Nullumgebung ist, existiert ein $a \in A^\perp$ und ein $t_1 \in T$, so dass

$$t_0 + a = t_1. \quad t_1, t_0 \in T' \Rightarrow a \in T' \Rightarrow a = \sum_{i \in I} (\xi_i 4i1 + \eta_i 4i0) + b,$$

$b \in B := k(4i1, 4i0)_{i \notin I} + S$. Aus $a \perp A$ und den Definitionen

auf den Seiten 49-52, A, E (p. 39) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(4i1, a) &= \xi_i = 0 & i \in I \\ \Phi(4i0', a) &= \eta_i = 0 & i \in I \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b \in B.$$

$$t_0 + a = t_1 \in T \Rightarrow \sum_{i \in I} (\lambda_i 4i1 + \mu_i 4i0) + s + a = \sum_{i \in I} \nu_i (4i1 + 4i0) + c,$$

$$c \in B. \Rightarrow \sum_{i \in I} (\lambda_i - \nu_i) 4i1 + \sum_{i \in I} (\mu_i - \nu_i) 4i0 = c - s - a \in B' = B, \text{ weil}$$

$c, s, a \in B$. Mit der Eindeutigkeit der Darstellung in B

erhält man aus der letzten Gleichung: $(\lambda_i - \nu_i) = 0$,

$(\mu_i - \nu_i) = 0$, also $\lambda_i = \mu_i = \nu_i$, denn $4i1, 4i0 \notin B', i \in I$.

$$\lambda_i = \mu_i = \nu_i \Rightarrow t_0 = \sum_{i \in I} (\lambda_i 4i1 + \mu_i 4i0) + s = \sum_{i \in I} \nu_i (4i1 + 4i0) + s \in$$

$R + S = T$, also $t_0 \in T$.

(3) Orthogonalräume.

$S^\perp$:

Wir verwenden Satz 5 (p. 18), Satz 10 (p. 47, 48), sowie die Definition von M (p. 40). Natürlich ist $ij1, ij0' \in B$.

$$S^\perp = \left[\sum_{ij1 \in S} k(ij1) + \sum_{ij0' \in S} k(ij0') + \sum_{ij0 \in S \setminus M} k(ij0) + \sum_{ij0 \in S \cap M} k(ij0) \right]^\perp =$$

$$\bigcap_{ij1 \in S} k(ij1)^\perp \cap \bigcap_{ij0' \in S} k(ij0')^\perp \cap \bigcap_{ij0 \in S \setminus M} k(ij0)^\perp \cap \left[\sum_{ij0 \in S \cap M} k(ij0) \right]^\perp =$$

$$\bigcap_{ij1 \in S} k(\mathcal{B} \setminus \{ij1\}) \cap \bigcap_{ij0' \in S} k(\mathcal{B} \setminus \{ij0'\}) \cap \bigcap_{ij0 \in S \setminus M} k(\mathcal{B} \setminus \{ij0\}) \cap \\ k[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in S \cap M\} \cup \{0m1 \mid 3 < m < \omega_0\})] = \\ k[\mathcal{B} \setminus (\{0m1 \mid 3 < m < \omega_0\} \cup \{ij1 \mid ij1 \in S\} \cup \{ij0 \mid ij0' \in S\} \cup \{ij0' \mid ij0 \in S\})].$$

$$V_k^\perp = U_\varepsilon + W_\varepsilon \quad k=1,3,12 :$$

Der Beweis läuft wie derjenige für $V_1^\perp = U_1 + W_1$ auf Seite 22; man muss dort nur die unter $V_k^\perp = V_k$ auf Seite 58 genannten Ersetzungen vornehmen ($U_\varepsilon, W_\varepsilon$: vgl. p. 52).

$$R^\perp = U_4 + W_4 :$$

$$(a) \quad U_4 + W_4 \subset R^\perp.$$

Mit den Definitionen auf Seite 52 und E (p. 39) verifiziert man leicht, dass $U_4 \perp R$ und $W_4 \perp R$.

$$(b) \quad R^\perp \subset U_4 + W_4.$$

Sei $x \in R^\perp$. zu zeigen: $x \in U_4 + W_4$.

$x = u + \sum_{j \in J} v_j 0j1 + \sum_l (\lambda_l 4l1 + \mu_l 4l0)$, wobei $u \in U_4$, J endliche Teilmenge von $\{j \mid 3 < j < \omega_0\}$ und höchstens endlich viele λ_l, μ_l von Null verschieden sind.

Sei $A := \{l \mid \lambda_l = 0 \wedge \mu_l = 0\}$. Weil A unendlich ist, existiert $B \subset A$ mit $|B| = |J|$. Da $4l1 + 4l0 \in R$, $4l1 + 4l0 - 4l1 - 4l0 \in R$ für $l \in A$, $x \perp R$, $u \perp R$ (vgl. (a)), gilt:

$$\Phi(x, 4l1 + 4l0) = \sum_{j \in J} v_j (\alpha_j + \beta_{4l})^{-1} = 0 \quad \textcircled{1} \quad \forall l \in B.$$

$$\Phi(x, 4l1 + 4l0 - 4l1 - 4l0) = \sum_{j \in J} v_j [(\alpha_j + \beta_{4l})^{-1} - (\alpha_j + \beta_{4l})^{-1}] + \lambda_l + \mu_l = 0 \quad \textcircled{2} \\ l \in A.$$

Aus $\textcircled{1}$ folgt (vgl. p. 42) $v_j = 0$, $\forall j \in J$ $\textcircled{3}$.

③ in ② eingesetzt: $\mu_i = -\lambda_i, \forall i$ ④. Mit ③ und ④ erhält man $x = u + \sum_i \lambda_i (4i1 - 4i0') \Rightarrow x \in U_4 + W_4$.

Wir geben nun ein Modell des Verbandes $\mathcal{V}$ (vgl. V.1).

Dazu definieren wir $(1,4,1) = V := \sum_{1 \leq i \leq 6} V_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G_{np}$.

Der besseren Übersicht wegen notieren wir im folgenden nur die Teilräume, deren Summe das Verbandselement ergibt. Das Verbandselement $(1,4,1)$ lautet in dieser neuen Schreibweise:

$(1,4,1)$:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq i \leq 6 : & V_i \\ n < \omega_0 & p < 6 : G_{np} \end{array}$$

Daraus erhält man die folgenden Verbandselemente (vgl. p.32-34,38):
(Wir verwenden wieder die Definitionen auf den Seiten 49-52)

$(0,5,0)$: (0)

$(0,6,0)$:

$$\begin{array}{ll} & k(5i0) \\ n < \omega_0 & p < 6 : k(ij0)_{ij0 \in G'_{np}} \end{array}$$

$(0,6,1)$:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq i \leq 4 : & V_i \\ & i = 5, 6 : V_i' \\ n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np} \end{array}$$

$(0,6,2) :$

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq i \leq 4 : & V_i \\
 & k(401) \\
 i = 5, 6 : & V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

$(0,6,3) :$

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq i \leq 4 ; i = 12 : & V_i \\
 & k(401) \\
 i = 5, 6 : & V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

$(0,7,0) :$

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq i \leq 4 : & k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \\
 & W_i
 \end{array}$$

$(0,7,2) :$

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq i \leq 4 : & k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \\
 & W_i \\
 i = 1, 2, 3, 9, 10, 11 : & V_i \\
 i = 4, 5, 6 : & V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

$(0,8,0) :$

$$\begin{array}{ll}
 i = 1, 2 : & k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \\
 & W_i \\
 i = 3, 4 : & W'_i \\
 i = 1, 2, 10, 11 : & V_i \\
 3 \leq i \leq 6 : & V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

64

(0,8,1) :

$$\begin{array}{ll}
 & k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \\
 i = 1, 2 & : W_i \\
 i = 3, 4 & : W'_i \\
 i = 1, 2, 11, 12, 13 & : V_i \\
 3 \leq i \leq 6 & : V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

(0,8,2) :

$$\begin{array}{ll}
 & k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \\
 & W_1 \\
 i = 2, 3, 4 & : W'_i \\
 i = 1, 11 & : V_i \\
 2 \leq i \leq 6 & : V'_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

(0,8,3) :

$$k\left[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in (0,6,0)\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\})\right]$$

(0,8,4) : $E \text{ (p.39)}$ (1,4,1) :

$$\begin{array}{ll}
 1 \leq i \leq 6 & : V_i \\
 n < \omega_0 & p < 6 : G'_{np}
 \end{array}$$

(1,5,0) :

$n = 0$	$p = 0,1$:	C_s
	$p = 2,4$:	G_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p = 0,1$:	C_t
	$p = 2,3,4$:	C_r

(1,7,1) :

		$k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i)$
	$1 \leq i \leq 4$:	W_i
	$1 \leq i \leq 5; 7 \leq i \leq 11$:	V_i
	$i = 6$:	V'_i
$n < \omega_0$	$p < 6$:	G_{np}

(2,1,0) :

$n = 0$	$p = 0,1$:	C_s
	$p = 2$:	G'_{02}
	$p = 4$:	G_{04}
$0 < n < \omega_0$	$p = 0,1$:	C_t
	$p = 2,3,4$:	C_r

(2,2,0) :

$n = 0$	$p = 0,1$:	C_s
	$p = 2,4$:	G'_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p = 0,1$:	C_t
	$p = 2,3,4$:	C_r

(2,3,0) :

$n = 0$	$p = 0,1$:	C'_s
	$p = 2,4$:	G'_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p = 0,1$:	C'_t
	$p = 2,3,4$:	C'_r

(2,4,0) : $n = 0$ $p = 0,1 :$ $H_{op} + C_s$ $p = 2,4 :$ G'_{op} $0 < n < \omega_0$ $p < 4 :$ $C_r + C_t$ $p = 4,5 :$ C_r (2,4,1) : $n = 0$ $1 \leq i \leq 6 :$ V_i $p = 0,1 :$ $G_{op} + H_{op}$ $p = 2,3,4 :$ G'_{op} $p = 5 :$ G_{os} $0 < n < \omega_0$ $p = 0,1,5 :$ $G_{np} + C_r$ $p = 2,3 :$ $G_{np} + C_t$ $p = 4 :$ G_{n4} (2,4,2) : $n = 0$ $1 \leq i \leq 6 :$ V_i $p = 0,1 :$ $G_{op} + H_{op}$ $1 < p < 6 :$ G'_{op} $0 < n < \omega_0$ $p = 0,1,5 :$ $G_{np} + C_r$ $p = 2,3 :$ $G_{np} + C_t$ $p = 4 :$ G_{n4} (2,5,0) : $n = 0$ $p = 0,1 :$ $H_{op} + C'_s$ $p = 2,4 :$ G'_{op} $0 < n < \omega_0$ $p = 0,1 :$ $C_r + C'_t$ $p = 2,3 :$ $C'_r + C_t$ $p = 4 :$ C'_r $p = 5 :$ C_r

(2,5,1) :

	$1 \leq i \leq 6$	:	V_i
$n=0$	$p=0,1$	:	$G_{op} + H_{op} + C'_s$
	$p=2,3,4$	:	G'_{op}
	$p=5$	:	G_{05}
$0 < n < \omega_0$	$p=0,1$	:	$G_{np} + C_r + C'_t$
	$p=2,3$	:	$G_{np} + C'_r + C'_t$
	$p=4$	:	$G_{np} + C'_r$
	$p=5$	:	$G_{np} + C_r$

(3,1,0) :

$n=0$	$p=0$	:	$H'_{00} + C'_s$
	$p=1$	:	$H_{01} + C'_s$
	$p=2,4$	:	G'_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p=0,1$	:	$C_r + C'_t$
	$p=2,3$	:	$C'_r + C'_t$
	$p=4$	:	C'_r
	$p=5$	:	C_r

(3,2,0) :

$n=0$	$p=0,1$	:	$H'_{op} + C'_s$
	$p=2,4$	:	G'_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p=0,1$	:	$C_r + C'_t$
	$p=2,3$	:	$C'_r + C'_t$
	$p=4$	:	C'_r
	$p=5$	:	C_r

(3,3,0) :

$n=0$	$p=0,1$	:	$H'_{op} + C'_s$
	$p=2,4$	:	G'_{op}
$0 < n < \omega_0$	$p < 4$	:	$C'_r + C'_t$
	$p=4,5$	:	C'_r

(3,4,0) : $n = 0$ $p = 0,1 :$

$H'_{op} + C'_s$

 $p = 2,4 :$

G'_{op}

 $n = 1$ $p = 0,1 :$

$H'_{1p} + C_r + C'_t \quad (r=s, t=\tau)$

 $p = 2,3 :$

$C_{r-1} + C'_r + C'_t \quad (r=s+1)$

 $p = 4 :$

C'_r

 $p = 5 :$

C_r

 $1 < n < \omega_0$ $p = 0,1 :$

$C_r + C'_{t-1} + C'_t$

 $p = 2,3 :$

$C_{r-1} + C'_r + C'_t$

 $p = 4 :$

$C_{r-1} + C'_r$

 $p = 5 :$

C_r

Im folgenden sei $(a,b,c)_{np}$ der unter dem Verbands-
element (a,b,c) bei n,p aufgeführte Teilraum (Beispiele:
 $(3,4,0)_{13} = C_{r-1} + C'_r + C'_t, (3,4,0)_{05} = (0)$). Damit kann zum
Beispiel $(2,5,1)$ einfacher dargestellt werden (vgl. p. 66, 67) :

(2,5,1) : $1 \leq i \leq 6 :$

V_i

 $n = 0$ $p = 2,3,4 :$

G'_{op}

restliche

 $n,p :$

$G_{np} + (250)_{np}$

Auch $(2,4,2)$ kann man einfacher notieren (vgl. p. 66):

(2,4,2) : $n = 0$ $1 < p < 6 :$

G'_{op}

restliche Teilräume :

wie $(2,4,1)$.

(3,4,2) : $1 \leq i \leq 6 :$

V_i

 $n = 0$ $p < 6 :$

G'_{op}

 $0 < n < \omega_0$ $p < 6 :$

$G_{np} + (3,4,0)_{np}$

(3,4,3):

$$\begin{array}{lll}
 n=1 & p=4 & : \\
 \text{restliche Teilräume} & & :
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 G'_{14} \\
 \text{wie } (3,4,2)
 \end{array}$$

(3,5,0):

$$\begin{array}{lll}
 n=0 & p=0,1 & : \\
 & p=2,4 & : \\
 n=1 & p=0,1 & : \\
 & p=2,3 & : \\
 & p=4,5 & : \\
 1 < n < \omega_0 & p=0,1 & : \\
 & p=2,3 & : \\
 & p=4 & : \\
 & p=5 & :
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 H'_{op} + C'_g \\
 G'_{op} \\
 H'_{1p} + C'_r + C'_t \quad (r=g, t=\tau) \\
 C'_{r-1} + C'_r + C'_t \quad (r=g+1) \\
 C'_r \\
 C'_r + C'_{t-1} + C'_t \\
 C'_{r-1} + C'_r + C'_t \\
 C'_{r-1} + C'_r \\
 C'_r
 \end{array}$$

(3,5,1):

$$\begin{array}{lll}
 & 1 \leq i \leq 6 & : \\
 n=0 & p < 5 & : \\
 & p=5 & : \\
 0 < n < \omega_0 & p < 6 & :
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 V_i \\
 G'_{op} \\
 G_{05} \\
 G_{np} + (3,5,0)_{np}
 \end{array}$$

Wir führen zwei weitere Abkürzungen ein:

$$R_m := \sum_{i=r-m}^r C'_i$$

$$T_m := \sum_{i=t-m}^t C'_i \quad , \quad m \leq n$$

$(2m, 1, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$$n = 0 \quad p = 0, 1 \quad :$$

$$p = 2, 4 \quad :$$

$$0 < n < m-1 \quad p = 0, 1 \quad :$$

$$p = 2, 3 \quad :$$

$$p = 4, 5 \quad :$$

$$n = m-1 \quad p = 0 \quad :$$

$$p = 1 \quad :$$

$$p = 2, 3 \quad :$$

$$p = 4, 5 \quad :$$

$$m \leq n < \omega_0 \quad p = 0, 1 \quad :$$

$$p = 2, 3 \quad :$$

$$p = 4 \quad :$$

$$p = 5 \quad :$$

$$H'_{op} + C'_g$$

$$G'_{op}$$

$$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$$

$$H'_{np} + R_n + T_{n-1}$$

$$R_{n-1}$$

$$H'_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1}$$

$$H'_{n1} + R_{n-1} + T_{n-1}$$

$$C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \quad (r-n=g)$$

$$R_{n-1}$$

$$R_{m-2} + C_{t-m+1} + T_{m-2}$$

$$C_{r-m+1} + R_{m-2} + T_{m-2}$$

$$C_{r-m+1} + R_{m-2}$$

$$R_{m-2}$$

$(2m, 2, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$$n = m-1 \quad p = 0, 1 \quad :$$

restliche Teilräume :

$$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$$

wie $(2m, 1, 0)$

$(2m, 3, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$$n < m-1 \quad :$$

$$n = m-1 \quad p = 0, 1 \quad :$$

$$p = 2, 3 \quad :$$

$$p = 4, 5 \quad :$$

$$m \leq n < \omega_0 \quad p = 0, 1 \quad :$$

$$p = 2, 3 \quad :$$

$$p = 4 \quad :$$

$$p = 5 \quad :$$

wie $(2m, 1, 0)$

$$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$$

$$R_n + T_{n-1}$$

$$R_{n-1}$$

$$R_{m-2} + T_{m-1}$$

$$R_{m-1} + T_{m-2}$$

$$R_{m-1}$$

$$R_{m-2}$$

$(2m, 4, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m-1$	:	wie $(2m, 1, 0)$
$n = m-1$	$p = 0, 1$:	$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$
	$p = 2, 3$:	$H_{np} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \ (r-n=g)$
	$p = 4, 5$:	R_{n-1}
$m \leq n < \omega_0$	$p < 4$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2} + C_{t-m+1} + T_{m-2}$
	$p = 4, 5$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2}$

$(2m, 4, 2m-1)$ $1 < m < \omega_0$:

	$1 \leq i \leq 6$:	V_i
$n < m-1$	$p < 6$:	G'_{np}
$n = m-1$	$p = 0, 1, 4$:	G'_{np}
restliche	n, p :	$G_{np} + (2m, 4, 0)_{np}$

$(2m, 4, 2m)$ $1 < m < \omega_0$:

$n = m-1$	$p = 0, 1, 4, 5$:	G'_{np}
restliche Teilräume	:	wie $(2m, 4, 2m-1)$

$(2m, 5, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m-1$	:	wie $(2m, 1, 0)$
$n = m-1$	$p = 0, 1$:	$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$
	$p = 2, 3$:	$H_{np} + R_n + T_{n-1}$
	$p = 4, 5$:	R_{n-1}
$m \leq n < \omega_0$	$p = 0, 1$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2} + T_{m-1}$
	$p = 2, 3$:	$R_{m-1} + C_{t-m+1} + T_{m-2}$
	$p = 4$:	R_{m-1}
	$p = 5$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2}$

$(2m, 5, 1)$ $1 < m < \omega_0$:

$1 \leq i \leq 6$:

$n=0$ $p < 5$:

$p=5$:

$0 < n < m-1$ $p < 4$:

$p=4, 5$:

$n=m-1$ $p=0, 1$:

restliche n, p :

V_i

G'_{op}

G_{os}

G'_{np}

$G_{np} + R_{n-1}$

G'_{np}

$G_{np} + (2m, 5, 0)_{np}$

$(2m+1, 1, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m-1$:

$n=m-1$ $p=0, 1$:

$p=2$:

$p=3$:

$p=4, 5$:

$m \leq n < \omega_0$:

wie $(2m, 1, 0)$

$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$

$H'_{n2} + R_n + T_{n-1}$

$H_{n3} + R_n + T_{n-1}$

R_{n-1}

wie $(2m, 5, 0)$

$(2m+1, 2, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n=0$ $p=0, 1$:

$p=2, 4$:

$0 < n < m$ $p=0, 1$:

$p=2, 3$:

$p=4, 5$:

$m \leq n < \omega_0$:

$H'_{op} + C'_s$

G'_{op}

$H'_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$

$H'_{np} + R_n + T_{n-1}$

R_{n-1}

wie $(2m, 5, 0)$

$(2m+1, 3, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m$:

$m \leq n < \omega_0$ $p < 4$:

$p=4, 5$:

wie $(2m+1, 2, 0)$

$R_{m-1} + T_{m-1}$

R_{m-1}

$(2m+1, 4, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m$	:	wie $(2m+1, 2, 0)$
$n = m$	$p = 0, 1$:	$H_{np} + C_{r-n+1} + R_{n-2} + T_{n-1} \quad (r-n+1=s)$
	$p = 2, 3$:	$C_{r-n} + R_{n-1} + C_{t-n+1} + T_{n-2} \quad (r-n=s, t-n+1=r)$
	$p = 4$:	R_{n-1}
	$p = 5$:	$C_{r-n+1} + R_{n-2} \quad (r-n+1=s)$
$m < n < \omega_0$	$p = 0, 1$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2} + C_{t-m} + T_{m-1}$
	$p = 2, 3$:	$C_{r-m} + R_{m-1} + C_{t-m+1} + T_{m-2}$
	$p = 4$:	$C_{r-m} + R_{m-1}$
	$p = 5$:	$C_{r-m+1} + R_{m-2}$

$(2m+1, 4, 2m)$ $1 < m < \omega_0$:

	$1 \leq i \leq 6$:	V_i
$n < m$	$p < 6$:	G'_{np}
$m \leq n < \omega_0$	$p < 6$:	$G_{np} + (2m+1, 4, 0)_{np}$

$(2m+1, 4, 2m+1)$ $1 < m < \omega_0$:

$n = m$	$p = 4$:	G'_{n4}
restliche Teilräume	:	wie $(2m+1, 4, 2m)$

$(2m+1, 5, 0)$ $1 < m < \omega_0$:

$n < m$	:	wie $(2m+1, 2, 0)$
$n = m$	$p = 0, 1$:	$H_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}$
	$p = 2, 3$:	$C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \quad (r-n=s)$
	$p = 4, 5$:	R_{n-1}
$m < n < \omega_0$	$p = 0, 1$:	$R_{m-1} + C_{t-m} + T_{m-1}$
	$p = 2, 3$:	$C_{r-m} + R_{m-1} + T_{m-1}$
	$p = 4$:	$C_{r-m} + R_{m-1}$
	$p = 5$:	R_{m-1}

$(2m+1, 5, 1)$ $1 < m < \omega_0$:

	$1 \leq i \leq 6$	:	V_i
$n=0$	$p < 5$	:	G'_{op}
	$p=5$	:	G_{05}
$0 < n < m$	$p < 4$	:	G'_{np}
	$p=4, 5$	:	$G_{np} + R_{n-1}$
$m \leq n < \omega_0$	$p < 6$	:	$G_{np} + (2m+1, 5, 0)_{np}$

$(2m, 6, 2m)$ $1 < m < \omega_0$:

	$1 \leq i \leq 5 ; i=7$	:	V_i
	$i=6$	:	V'_i
$n < m$	$p < 6$	:	G'_{np}
$m \leq n < \omega_0$	$p < 4$	:	G'_{np}
	$p=4$	:	$H_{n4} + E'_r$
	$p=5$	:	$H_{n5} + D'_r$

$(m, 8, m)$ $0 < m < \omega_0$:

$$k \left[\mathcal{B} \setminus \left(\{ij0' \mid ij0 \in (m+1, 3, 0)\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\} \right) \right] .$$

Beweis.

zuerst definiert man

$$(0, 5, 0) := (0), \quad (0, 8, 4) := E, \quad (1, 4, 1) := \sum_{1 \leq i \leq 6} V_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G_{np} .$$

Aus diesen 3 Verbandselementen berechnen wir die übrigen. Dabei verwenden wir die Resultate von I. und V.1, die Sätze 1-11, die Eigenschaften (1)-(3) der Teilräume (p.53), sowie die Definitionen auf den Seiten 49-52.

(0,6,3). Die Summe der Teilräume, die auf Seite 63 unter (0,6,3) aufgeführt sind, bezeichnen wir hier mit W . Zu zeigen ist also: $(0,6,3) = W$.

$$(0,6,3) := (1,4,1)^\perp \Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq 4} V_i^\perp + (V_5 + V_6)^\perp + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G_{np}^\perp \subset (0,6,3).$$

Mit (2) (p.53) folgt daraus

$$W \subset (0,6,3) \quad \textcircled{\text{I}}. \quad \text{Behauptung: } W^\perp = W.$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}_i := \{0i1\} \cup \{ij0, ij0', ij1 \mid j < \omega_1^4\}$ $1 \leq i \leq 3$,
 $\mathcal{B}_4 := \mathcal{B} \setminus \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{B}_i$. Aus der Definition von E (p.39) folgt, dass die Mengen $\mathcal{B}_i$, $1 \leq i \leq 4$, eine Partition von $\mathcal{B}$ bilden und paarweise orthogonal sind.

Nach Definition der Teilräume V_i (p.51) und T (p.52) gilt: $V_1 \subset k(\mathcal{B}_1)$, $V_{12} \subset k(\mathcal{B}_2)$, $V_3 \subset k(\mathcal{B}_3)$, $T \subset k(\mathcal{B}_4)$.

Daraus erhält man mit Satz 4 (p.16,17), (2), und

$$W = V_1 + V_{12} + V_3 + T : W^\perp = (V_1 + V_{12} + V_3 + T)^\perp = V_1^\perp + V_{12}^\perp + V_3^\perp + T^\perp = V_1 + V_{12} + V_3 + T = W, \text{ somit } W^\perp = W.$$

$$(1,4,1) \subset W \Rightarrow (1,4,1)^\perp \subset W^\perp. \text{ Daraus folgt mit } (0,6,3) := (1,4,1)^\perp \text{ und } W^\perp = W : (0,6,3) \subset W \quad \textcircled{\text{II}}.$$

Aus $\textcircled{\text{I}}$ und $\textcircled{\text{II}}$ also: $(0,6,3) = W$.

(0,7,0). Zuerst formen wir $\bigcap_{i=1}^4 (U_i + W_i)$ (vgl. p.52)

unter Verwendung des modularen Gesetzes um.

$$\left. \begin{array}{l} W_1 \subset U_2 \\ W_2 \subset U_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (W_1 + U_1) \cap (W_2 + U_2) = W_1 + [U_1 \cap (W_2 + U_2)] = W_1 + [(W_2 + U_2) \cap U_1] = W_1 + [W_2 + (U_2 \cap U_1)], \text{ also}$$

$$(W_1 + U_1) \cap (W_2 + U_2) = W_1 + W_2 + (U_1 \cap U_2). \text{ Daraus folgt}$$

$$\text{mit } (W_1 + W_2) \subset U_3, W_3 \subset (U_1 \cap U_2) : \bigcap_{i=1}^3 (W_i + U_i) =$$

$$[(W_1 + W_2) + (U_1 \cap U_2)] \cap (W_3 + U_3) = (W_1 + W_2) + [(U_1 \cap U_2) \cap (W_3 + U_3)] =$$

$$W_1 + W_2 + [(W_3 + U_3) \cap (U_1 \cap U_2)] = W_1 + W_2 + [W_3 + (U_3 \cap U_1 \cap U_2)].$$

$$\text{Somit: } \bigcap_{i=1}^3 (W_i + U_i) = \sum_{i=1}^3 W_i + \bigcap_{i=1}^3 U_i. \text{ Weil } \sum_{i=1}^3 W_i \subset U_4 \text{ und } W_4 \subset \bigcap_{i=1}^3 U_i \text{ erhält man damit schließlich}$$

$$\bigcap_{i=1}^4 (W_i + U_i) = \bigcap_{i=1}^3 (W_i + U_i) \cap (W_4 + U_4) = \left[\left(\sum_{i=1}^3 W_i \right) + \left(\bigcap_{i=1}^3 U_i \right) \right] \cap (W_4 + U_4) \\ = \sum_{i=1}^3 W_i + \left[\left(\bigcap_{i=1}^3 U_i \right) \cap (W_4 + U_4) \right] = \sum_{i=1}^3 W_i + \left[(W_4 + U_4) \cap \bigcap_{i=1}^3 U_i \right] = \sum_{i=1}^3 W_i + [W_4 + \bigcap_{i=1}^4 U_i]. \quad \text{Also:}$$

$$\bigcap_{i=1}^4 (U_i + W_i) = \sum_{i=1}^4 W_i + \bigcap_{i=1}^4 U_i \quad \textcircled{A}.$$

Mit $(0,6,3) = V_1 + V_{12} + V_3 + T$ (vgl. p. 75), (3) (p. 53), den Definitionen auf Seite 52 und $\textcircled{A}$ erhält man

$$(0,7,0) := (1,4,1)^\perp = [(1,4,1)^\perp]^\perp = (0,6,3)^\perp = (V_1 + V_{12} + V_3 + T)^\perp = (V_1^\perp \cap V_{12}^\perp \cap V_3^\perp) \cap T^\perp = \bigcap_{i=1}^3 (U_i + W_i) \cap R^\perp \cap S^\perp = \bigcap_{i=1}^4 (U_i + W_i) \cap S^\perp = \left(\sum_{i=1}^4 W_i + \bigcap_{i=1}^4 U_i \right) \cap S^\perp. \quad \text{Weil } \sum_{i=1}^4 W_i \subset S^\perp \text{ (vgl. p. 52, 53), folgt:}$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 W_i + \bigcap_{i=1}^4 U_i \right) \cap S^\perp = \sum_{i=1}^4 W_i + \left(\bigcap_{i=1}^4 U_i \cap S^\perp \right).$$

Mit den Definitionen auf Seite 52, (3), und Satz 5 (p. 18)

$$\text{beweist man: } \bigcap_{i=1}^4 U_i \cap S^\perp = k \left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i \right).$$

Damit gilt:

$$(0,7,0) = \sum_{i=1}^4 W_i + k \left(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i \right), \text{ in Übereinstimmung mit } (0,7,0) \text{ auf Seite 63.}$$

Wir beweisen nun die Richtigkeit der Tabellen auf den Seiten 70-74 mit vollständiger Induktion nach m .

Den Induktionsanfang $m=2$ behandeln wir später.

Induktionsannahme: Für ein beliebiges m mit $1 < m < \omega_0$ sollen die Teilräume auf den Seiten 70-74 richtig sein.

Beweis der Gültigkeit für $m+1$.

$(2m+2, 4, 2m+2)$. W sei die Summe der Teilräume, die auf Seite 71 unter $(2m+2, 4, 2m+2)$ auftreten.

[In $(2m, 4, 2m)$ auf Seite 71 ist m überall durch $m+1$ zu ersetzen].

Zu zeigen: $(2m+2, 4, 2m+2) = W$.

Behauptung: $W \subset (2m+2, 4, 2m+2)$ ①.

Beweis. $(a, b, c)_{np}$ sei wie auf Seite 68 definiert.

Ferner sei $W_{np} := (2m+2, 4, 2m+2)_{np}$.

$$(2m+2, 4, 2m+2) := \overline{(2m+1, 5, 1)} \quad ① \Rightarrow$$

$$V_i \subset (2m+2, 4, 2m+2) \text{ für } 1 \leq i \leq 6 \quad ② \quad [V_i \subset (2m+1, 5, 1) \text{ (p.74)}].$$

$$① \Rightarrow \overline{(2m+1, 5, 1)_{np}} \subset (2m+2, 4, 2m+2) \quad ③.$$

Aus ③ erhält man unter Verwendung von $(2m+1, 5, 1)$ (p.74), den Definitionen auf den Seiten 49-51, 69, sowie (1) (p.53):

$$W_{np} \subset (2m+2, 4, 2m+2) \text{ für } n < \omega_0, p < 6 \quad ④.$$

- Beweis von ④ für $n=0 \wedge p < 6$, sowie für $0 < n < m \wedge p < 4$:

$$W_{np} = G'_{np} = \overline{(2m+1, 5, 1)_{np}} \subset (2m+2, 4, 2m+2).$$

- Beweis von ④ für $0 < n \leq m \wedge p = 4, 5$:

$$\text{Für } p=4, 5 \text{ ist } \sum_{i=s}^r C'_i = \sum_{i=r-n+1}^r C'_i = R_{n-1} \text{ (vgl. p.49, 69),}$$

$$H_{np} \subset F_{np} + C'_s \subset G_{np} + R_{n-1}. \text{ Damit gilt: } W_{np} = G'_{np} = G_{np} + F'_{np} + \sum_{i=s}^r C'_i = G_{np} + H'_{np} + \sum_{i=s}^r C'_i = G_{np} + H_{np} + R_{n-1} \subset \overline{H_{np} + G_{np} + R_{n-1}} = \overline{G_{np} + R_{n-1}} = \overline{(2m+1, 5, 1)_{np}} \subset (2m+2, 4, 2m+2).$$

- Beweis von ④ für $n=m \wedge p=0, 1$:

$$\text{Wieder ist } \sum_{i=s}^r C'_i = R_{n-1}, \sum_{i=\tau}^t C'_i = T_{n-1}. n=m \Rightarrow 1 < n < \omega_0. \text{ Daraus}$$

$$\text{erhält man (vgl. p.50, 51): } W_{np} = G'_{np} = F'_r + D'_r + E'_t = F'_{np} + (D'_r + \sum_{i=s}^r C'_i) + (E'_t + \sum_{i=\tau}^t C'_i) \subset G_{np} + F'_{np} + \sum_{i=s}^r C'_i + \sum_{i=\tau}^t C'_i \subset G_{np} + I'_{np} + \sum_{i=s}^r C'_i + H'_{np} + \sum_{i=\tau}^t C'_i = G_{np} + (H'_{np} + I'_{np}) + R_{n-1} + T_{n-1} = G_{np} + (H_{np} + I'_{np}) + R_{n-1} + T_{n-1} = G_{np} + H_{np} + \overline{I_{np}} + R_{n-1} + T_{n-1} \subset \overline{G_{np} + H_{np} + I_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}} \quad ⑤.$$

Für $p=0$ ist $I_{n0} + R_{n-1} = H_{n0} + R_{n-1}$; für $p=1$ gilt $I_{n1} + R_{n-1} = L_{n1} + R_{n-1} \subset F_{n1} + R_{n-1} \subset G_{n1} + R_{n-1}$. Damit gilt für Ausdruck ⑤:

$$\overline{G_{np} + H_{np} + I_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}} \subset \overline{G_{np} + H_{np} + R_{n-1} + T_{n-1}} = \overline{(2m+1, 5, 1)_{np}} \subset (2m+2, 4, 2m+2).$$

- Beweis von ④ für $n=m \wedge p=2,3$:

Für $p=2,3$ ist $C_{r-n} = C_s$, $T_{n-1} = \sum_{i=\tau}^t C'_i \Rightarrow J_{np} + T_{n-1} =$

$J_{np} + \sum_{i=\tau}^t C'_i \leq F_{np} + \sum_{i=\tau}^t C'_i + C_s = F_{np} + T_{n-1} + C_{r-n}$, also

$J_{np} + T_{n-1} \leq F_{np} + T_{n-1} + C_{r-n}$. $H_{np} \leq \bar{J}_{np}$ (vgl. (1), p.53).

Damit erhält man $W_{np} = G_{np} + H_{np} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \leq$

$G_{np} + \bar{J}_{np} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \leq \frac{G_{np} + (J_{np} + T_{n-1}) + C_{r-n} + R_{n-1}}{G_{np} + (F_{np} + T_{n-1} + C_{r-n}) + R_{n-1}} \leq$

$\frac{G_{np} + (J_{np} + T_{n-1}) + C_{r-n} + R_{n-1}}{G_{np} + (F_{np} + T_{n-1} + C_{r-n}) + R_{n-1}} \leq \frac{G_{np} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1}}{(2m+1, 5, 1)_{np}} \leq$

$(2m+2, 4, 2m+2)$.

- Beweis von ④ für $m < n < \omega_0 \wedge p < 4$:

$m \leq n-1 \Rightarrow -n+1 \leq -m \Rightarrow g \leq r-n+1 \leq r-m$ (vgl. p.49), also

$g \leq r-m$ und wegen $1 < m$: $g \leq r-m < r$ ⑥. Analog:

$\tau \leq t-m < t$ ⑦. Aus ⑥ und ⑦ folgt: $A_{r-m} + A_{t-m} \leq$

$\sum_{i=g}^{r-1} A_i + \sum_{i=\tau}^{t-1} A_i \leq G_{np}$ (vgl. p.50,51), also $A_{r-m} + A_{t-m} \leq G_{np}$ ⑧.

Aus $C_i \leq \bar{B}_i$ (vgl. p.53) und $A_{r-m} + C'_{r-m+1} = B_{r-m} + C'_{r-m+1}$ (vgl. p.50)

folgt: $(A_{r-m} + C'_{r-m+1}) + C_{r-m} = (B_{r-m} + C'_{r-m+1}) + C_{r-m} \leq$

$(\bar{B}_{r-m} + C_{r-m}) + C'_{r-m+1} = \bar{B}_{r-m} + C'_{r-m+1} \leq \frac{\bar{B}_{r-m} + C'_{r-m+1}}{A_{r-m} + C'_{r-m+1}} =$

$\frac{\bar{B}_{r-m} + C'_{r-m+1}}{A_{r-m} + C'_{r-m+1}}$. Also: $A_{r-m} + C'_{r-m+1} + C_{r-m} \leq A_{r-m} + C'_{r-m+1}$ ⑨.

Mit ⑧ und ⑨ erhält man: $W_{np} = G_{np} + C_{r-m} + R_{m-1} +$

$C_{t-m} + T_{m-1} \leq G_{np} + (A_{r-m} + C'_{r-m+1} + C_{r-m}) + (A_{t-m} + C'_{t-m+1} + C_{t-m}) +$

$R_{m-1} + T_{m-1} \leq G_{np} + \frac{A_{r-m} + C'_{r-m+1}}{A_{r-m} + C'_{r-m+1}} + \frac{A_{t-m} + C'_{t-m+1}}{A_{t-m} + C'_{t-m+1}} + R_{m-1} +$

$T_{m-1} \leq \frac{(G_{np} + A_{r-m} + A_{t-m}) + (R_{m-1} + C'_{r-m+1}) + (T_{m-1} + C'_{t-m+1})}{G_{np} + R_{m-1} + T_{m-1}} \leq$

$\frac{(G_{np} + A_{r-m} + A_{t-m}) + (R_{m-1} + C'_{r-m+1}) + (T_{m-1} + C'_{t-m+1})}{G_{np} + R_{m-1} + T_{m-1}} \leq \frac{(2m+1, 5, 1)_{np}}{(2m+2, 4, 2m+2)} \leq$

$(2m+2, 4, 2m+2)$.

- Beweis von ④ für $m < n < \omega_0 \wedge p=4,5$:

Lässt man im Beweis für $p < 4$ $C_{t-m} + T_{m-1}$ weg, so

erhält man den Beweis für $p=4,5$: $W_{np} = G_{np} + C_{r-m} +$

$R_{m-1} \leq \frac{G_{np} + R_{m-1}}{(2m+1, 5, 1)_{np}} \leq (2m+2, 4, 2m+2)$.

Damit ist ④ bewiesen.

Aus ② und ④ folgt ①.

Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen und Schranken auf den Seiten 49-52. Definition von M vgl. Satz 6, Seite 40.

Damit definieren wir die folgenden Teilräume von E :

$$\begin{aligned}
 X_0 &:= V_4 & X_1 &:= V_5 + V_{15} & X_2 &:= V_{14} \\
 n < m & & p < 6 & & & \\
 n = m & & p = 0, 1, 4, 5 & \left. \vphantom{\begin{matrix} p < 6 \\ p = 0, 1, 4, 5 \end{matrix}} \right\} & X_{np} &:= k(ij0)_{ij0 \in G'_{np} \cap M} \\
 n = m & & p = 2 & : & X_{n2} &:= H_{n2} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \quad (r-n=g) \\
 & & p = 3 & : & X_{n3} &:= L_{n3} + H_{n3} + C_{r-n} + R_{n-1} + T_{n-1} \\
 n = m+1 & & p = 0, 1 & : & X_{np} &:= F_{np} + C_{r-m} + R_{m-1} + C_{t-m} + T_{m-1} \quad \left(\begin{matrix} r-m=g \\ t-m=\tau \end{matrix} \right) \\
 & & p = 2, 3 & : & X_{np} &:= F_{np} + A_g + C_{r-m} + R_{m-1} + C_{t-m} + T_{m-1} \quad (r-m=g+1) \\
 & & p = 4, 5 & : & X_{np} &:= F_{np} + C_{r-m} + R_{m-1} \\
 m+1 < n < \omega_0 & & p < 4 & : & X_{np} &:= F_{np} + \sum_{i=g}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + R_{m-1} + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} A_i + C_{t-m} + T_{m-1} \\
 & & p = 4, 5 & : & X_{np} &:= F_{np} + \sum_{i=g}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + R_{m-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n < m & & p < 6 & \\
 n = m & & p = 0, 1, 4, 5 & \left. \vphantom{\begin{matrix} p < 6 \\ p = 0, 1, 4, 5 \end{matrix}} \right\} & Y_{np} &:= k(ijl)_{ijl \in G'_{np} \setminus M}
 \end{aligned}$$

$$n = m \quad p = 2 \quad : \quad Y_{n2} := k(x\lambda 1) + \sum_{i=g}^{r-1} k(i\gamma 1) + \sum_{i=\tau}^t k(i\gamma 1)$$

$$p = 3 \quad : \quad Y_{n3} := k(x\nu 1) + \sum_{i=g}^{r-1} k(i\gamma 1) + \sum_{i=\tau}^t k(i\gamma 1)$$

$$\begin{aligned}
 m < n < \omega_0 \quad p = 0, 1 \quad : \quad Y_{np} &:= \sum_{i=r-m}^r k(i\gamma 1) + \sum_{i=t-m}^{t-1} k(i\gamma 1) \\
 & \quad (n=m+1: r-m=g, t-m=\tau)
 \end{aligned}$$

$$p=2,3 : Y_{np} := \sum_{i=r-m}^{r-1} k(i\gamma 1) + \sum_{i=t-m}^t k(i\gamma 1) \\ (n=m+1 : r-m=g+1, t-m=\tau)$$

$$p=4 : Y_{np} := \sum_{i=r-m}^{r-1} k(i\gamma 1) \\ (n=m+1 : r-m=g)$$

$$p=5 : Y_{np} := \sum_{i=r-m}^r k(i\gamma 1) \\ (n=m+1 : r-m=g)$$

Wegen $m > 1$, den Definitionen auf Seite 49 unten, ⑥ und ⑦ (p. 78), sind die in X_{np}, Y_{np} auftretenden Summen definiert.

$$X := \sum_{i=0}^2 X_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} X_{np}, \quad Y := k(i\lambda 0')_{i=6,7} + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} Y_{np}, \quad U := X + Y.$$

Behauptung : $V_1 + V_3 + U = W$ ⑩.

Beweis. $V_1 + V_3 + \sum_{i=0}^2 X_i + k(i\lambda 0')_{i=6,7} = \sum_{i=1}^6 V_i$ ⑪.

$X_{np} + Y_{np} = W_{np}$ für $n < \omega_0, p < 6$ ⑫.

- Beweis von ⑫ für $n < m \wedge p < 6$, sowie für $n=m \wedge p=0,1,4,5$:

$$X_{np} + Y_{np} = G'_{np} = W_{np}.$$

- Beweis von ⑫ für $n=m \wedge p=3$:

Für $p=2,3$ ist $R_{n-1} = \sum_{i=g+1}^r C'_i, T_{n-1} = \sum_{i=\tau}^t C'_i$.

a) $X_{n3} + Y_{n3} \subset W_{n3}$.

$$X_{n3} \subset W_{n3} : X_{n3} \subset G_{n3} + (2m+2, 4, 0)_{n3} = W_{n3}.$$

$$Y_{n3} \subset W_{n3} : k(x\gamma 1) \subset Q_{n3} + C'_\tau + H_{n3} \subset G_{n3} + H_{n3} + T_{n-1} \subset W_{n3} \\ \sum_{i=g}^{r-1} k(i\gamma 1) + \sum_{i=\tau}^t k(i\gamma 1) \subset \left(\sum_{i=g}^{r-1} A_i + C'_g + \sum_{i=g+1}^r C'_i \right) + \left(\sum_{i=\tau}^{t-1} A_i + B_t + \sum_{i=\tau}^t C'_i \right) \subset (E_r + C'_g + R_{n-1}) + (D_t + T_{n-1}) \subset G_{n3} +$$

$$(2m+2, 4, 0)_{n3} = W_{n3}.$$

b) $W_{n3} \subset X_{n3} + Y_{n3}$.

Da $W_{n_3} = G_{n_3} + X_{n_3}$, ist zu zeigen: $G_{n_3} \subset X_{n_3} + Y_{n_3}$.
 $G_{n_3} = F_{n_3} + E_r + D_t \subset \left[\sum_{i=9}^{t-1} k(ix1) \right] + \left[\sum_{i=\tau}^{t-1} C'_i + \sum_{i=\tau}^t k(ix1) \right] \subset X_{n_3} + Y_{n_3}$.

- Beweis von ⑫ für $n=m \wedge p=2$: analog zu $p=3$.

- Beweis von ⑫ für $m < n < \omega_0 \wedge p=2,3$:

Für $n=m+1 \wedge p=2,3$ ist $r-m = s+1$, $t-m = \tau$. Im folgenden Beweis unter b) ist also $\sum_{i=\tau}^{t-m-1} A_i$ für $n=m+1$ nicht definiert und somit wegzulassen.

Wir verwenden wieder ⑥ und ⑦, p. 78.

a) $X_{np} + Y_{np} \subset W_{np}$.

$X_{np} \subset W_{np}$: $X_{np} \subset G_{np} + (2m+2, 4, 0)_{np} = W_{np}$.

$Y_{np} \subset W_{np}$: $\sum_{i=r-m}^{r-1} k(ix1) + \sum_{i=t-m}^t k(ix1) \subset \left[\sum_{i=r-m}^{r-1} A_i + C_{r-m} + \sum_{i=r-m+1}^r C'_i \right] +$

$\left[\sum_{i=t-m}^{t-1} A_i + B_t + C_{t-m} + \sum_{i=t-m+1}^t C'_i \right] \subset (E_r + C_{r-m} + R_{m-1}) + (D_t + C_{t-m} + T_{m-1}) \subset G_{np} + (2m+2, 4, 0)_{np} = W_{np}$.

b) $W_{np} \subset X_{np} + Y_{np}$.

Da $W_{np} = G_{np} + X_{np}$, ist zu zeigen: $G_{np} \subset X_{np} + Y_{np}$.
 $G_{np} = F_{np} + E_r + D_t \subset F_{np} + \left[\sum_{i=9}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + \sum_{i=r-m+1}^r C'_i + \sum_{i=r-m}^{r-1} k(ix1) \right] +$

$\left[\sum_{i=\tau}^{t-m-1} A_i + C_{t-m} + \sum_{i=t-m+1}^t C'_i + \sum_{i=t-m}^t k(ix1) \right] \subset X_{np} + Y_{np}$.

- Beweis von ⑫ für die restlichen n, p :

analog zum Beweis für $m < n < \omega_0 \wedge p=2,3$.

Damit ist ⑫ bewiesen. Aus ⑪ und ⑫ folgt ⑩.

Behauptung: $\bar{W} = W$.

Beweis. Für die unter (0,6,3) (p.75) definierte, orthogonale Partition von $\mathcal{B}$ gilt: $V_1 \subset k(\mathcal{B}_1)$, $V_3 \subset k(\mathcal{B}_3)$,

$U \subset k(\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_4)$. Mit Satz 4 (p.16/17), (1) (p.53) ⑩

(p.80) erhält man also: $\bar{W} = V_1 + V_3 + U = V_1 + V_3 + \bar{U} =$

$V_1 + V_3 + \bar{U}$. Nach ⑩ bleibt zu zeigen: $\bar{U} = U$.

Beweis. M sei wie in Satz 6 (p. 40) definiert. Für beliebige $x \in E \setminus \{0\}$ und $X \subseteq E$ vereinbaren wir:

x besitzt die Eigenschaft (E) , wenn in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein $ij0 \in M$ auftritt.

X besitzt die Eigenschaft (E) , wenn jedes $x \in X \setminus \{0\}$ die Eigenschaft (E) besitzt.

Sei $x \in X_{np} \setminus \{0\}$ für ein n mit $m+1 < n < \omega_0$ und ein p mit $p < 4 \Rightarrow$

$$x \in F_{np} + \sum_{i=s}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + \sum_{i=r-m+1}^r C'_i + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} A_i + C_{t-m} + \sum_{i=t-m+1}^t C'_i \Rightarrow$$

$$x = f + \sum_{i=s}^{r-m-1} a_i + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} a_i + c + d + e, \text{ wobei } f \in F_{np},$$

$$a_i \in A_i, c \in \sum_{i=r-m+1}^r C'_i + \sum_{i=t-m+1}^t C'_i, d \in C_{r-m}, e \in C_{t-m}.$$

Annahme (A): x besitzt die Eigenschaft (E) nicht.

Annahme (B): $c \neq 0$.

Aus (B) und den Definitionen auf den Seiten 49, 50 folgt:

c besitzt die Eigenschaft (E) . Gemäss Definition der Räume F_{np}, A_i, C_i tritt kein Element aus $\mathcal{B}$ sowohl in der Darstellung von c in $\mathcal{B}$, als auch in der Darstellung von $b := f + \sum_{i=s}^{r-m-1} a_i + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} a_i + d + e$ in $\mathcal{B}$ auf (sofern auch $b \neq 0$). Weil $x = c + b$, besitzt damit auch x die Eigenschaft (E) . Dies steht im Widerspruch zur Annahme (A). Aus (A) folgt also $c = 0$.

Annahme (C): $d \neq 0$.

Zusätzlich soll Annahme (A) gelten.

Sei $g := f + \sum_{i=s}^{r-m-1} a_i + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} a_i + e$. Aus den Definitionen der Räume F_{np}, A_i, C_i folgt, dass höchstens Vektoren aus $k(r-m \wedge 0)$ sowohl in der Darstellung von d in $\mathcal{B}$,

als auch in der Darstellung von g in $\mathcal{B}$ vorkommen (falls $g \neq 0$). Damit erhält man: Weil $x = d + g$ ($A \Rightarrow c = 0$) und die Darstellung von d in $\mathcal{B}$ mindestens einen Vektor $r-m \beta 0$ mit $r-m \beta 0 \notin k(r-m \neq 0)$ enthält, tritt $r-m \beta 0$ auch in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ auf. Da $r-m \beta 0 \in M$ entsteht ein Widerspruch zur Annahme $\textcircled{A}$. Aus $\textcircled{A}$ folgt deshalb $d = 0$. Ebenso erhält man $e = 0$. Sei nun $Z := \{i \mid s \leq i < r-m \wedge a_i \neq 0\}$.

Annahme $\textcircled{D}$: $Z \neq \emptyset$.

Annahme $\textcircled{A}$ soll weiterhin gelten.

Sei $i_0 := \max Z$. Daraus folgt, dass höchstens Vektoren aus $k(i_0 \neq 0)$ zugleich in der Darstellung von a_{i_0} in $\mathcal{B}$ und in der Darstellung von $h := f + \sum_{s \leq i < i_0} a_i + \sum_{i=\tau}^{t-m-1} a_i$ in $\mathcal{B}$ auftreten (vgl. Definitionen von F_{np}, A_i).

Weil $x = a_{i_0} + h$ und die Darstellung von a_{i_0} in $\mathcal{B}$ mindestens einen Vektor $i_0+1 \tilde{x} 0 \notin k(i_0 \neq 0)$ enthält, kommt $i_0+1 \tilde{x} 0$ auch in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ vor. Da $i_0+1 \tilde{x} 0 \in M$ entsteht ein Widerspruch zur Annahme $\textcircled{A}$. Aus $\textcircled{A}$ folgt somit $Z = \emptyset$, also

$a_i = 0$, für alle i mit $s \leq i < r-m$. Analog beweist man:

$a_i = 0$, für alle i mit $\tau \leq i < t-m$.

Aus der Annahme $\textcircled{A}$ folgt also: $x = f \neq 0 \Rightarrow x \in F_{np} \setminus \{0\}$.

a) $p = 0, 2$:

Aus der Definition von F_{np} (p. 50) folgt, dass in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein Vektor $\tau \wedge 0 \in M$ auftritt. Deshalb ist die Annahme $\textcircled{A}$ falsch.

x besitzt also die Eigenschaft $\textcircled{E}$.

b) $p = 1, 3$:

$x \in F_{np} \setminus \{0\} \Rightarrow x = y + z, y \in L_{np}, z \in Q_{np}$. Aus den Definitionen der Räume L_{np} und Q_{np} folgt: Wenn $y \neq 0$, tritt in der

Darstellung von y in $\mathcal{B}$ mindestens ein Vektor $g_1 0 \notin k(x_{00})$ auf; falls $z \neq 0$, kommt in der Darstellung von z in $\mathcal{B}$ mindestens ein Vektor $\tau v 0 \notin k(x_{00})$ vor. Weil $L'_{np} \cap Q'_{np} = k(x_{00})$, ist dieser Vektor $g_1 0 \in M$ bzw. $\tau v 0 \in M$ auch in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ enthalten. Deswegen ist die Annahme ① falsch, und x besitzt auch in diesem Fall die Eigenschaft ⑤.

Es sei nun $x \in X_{np} \setminus \{0\}$ für ein n mit $m+1 < n < \omega_0$ und $p=4$ oder $p=5 \Rightarrow$

$$x \in F_{np} + \sum_{i=s}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + \sum_{i=r-m+1}^r C'_i \Rightarrow$$

$$x = f + \sum_{i=s}^{r-m-1} a_i + c + d, \text{ wobei } f \in F_{np}, a_i \in A_i,$$

$$c \in \sum_{i=r-m+1}^r C'_i, d \in C_{r-m}. \text{ Wie auf den Seiten 82, 83}$$

beweist man, dass aus der Annahme ① folgt: $c=d=0$ und $a_i=0$ für alle i mit $s \leq i < r-m$. Deshalb gilt (vgl. p. 83): $x \in F_{np} \setminus \{0\}$. Weil damit in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein Vektor $g_1 0 \in M$ auftritt, ist die Annahme ① falsch, und x besitzt wieder die Eigenschaft ⑤.

Wir fassen die Ergebnisse der Seiten 82-84 zusammen: Für alle n und p mit $m+1 < n < \omega_0$, $p < 6$ besitzt X_{np} die Eigenschaft ⑤.

Analog laufen die Beweise der Gültigkeit von ⑤ für die restlichen X_{np} ; dabei folgt ⑤ zum Teil direkt aus den Definitionen von X_{np} und der Räume auf den Seiten 50, 51 (H_{n_2} : $g_1 0 \in M$; H_{n_3} : $g_{\mu} 0 \in M$).

Wir behandeln noch den Fall $x \in X_1 = V_5 + V_{15} \Rightarrow x = v + w$, $v \in V_5$, $w \in V_{15}$. Aus $x \neq 0$ und den Definitionen von V_5 , V_{15} (p. 51) folgt: Ist $x = v$, so tritt in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein $5i0 \in M$ auf; ist $w \neq 0$, so enthält die Darstellung von w , und wegen $V_5' \cap V_{15}' = k(5i0)$ auch die Darstellung von $x = v + w$ in $\mathcal{B}$ mindestens einen Vektor $6\lambda 0 \in M$. Damit besitzt auch X_1 die Eigenschaft $\textcircled{E}$. Für X_0 und X_2 folgt $\textcircled{E}$ direkt aus den Definitionen von V_4 und V_{14} ($V_4: 4i0 \in M$; $V_{14}: 7\lambda 0 \in M$).

Weil alle X_i und X_{np} aus X die Eigenschaft $\textcircled{E}$ besitzen und je zwei verschiedene Räume der Familie aller X_i' und X_{np}' nur den Nullvektor gemeinsam haben, besitzt auch X die Eigenschaft $\textcircled{E}$. Zudem enthält X' kein $0n1 \in \mathcal{B}$ ($0 < n < \omega_0$). Jedes $x \in X \setminus \{0\}$ erfüllt also die in Satz 7 (p. 42) geforderten Bedingungen. Da $Y = Y' \subset N$ (Definition von Y : p. 80; Definition von N : p. 42) und $X' \cap Y = (0)$, folgt aus Satz 7: $\bar{U} = U$. Damit ist auch die Behauptung $\bar{W} = W$ bewiesen.

$(2m+1, 5, 1) \subset W$ (vgl. p. 71, 74) $\Rightarrow \overline{(2m+1, 5, 1)} \subset \bar{W}$. Daraus folgt mit $(2m+2, 4, 2m+2) := \overline{(2m+1, 5, 1)}$ und $\bar{W} = W$: $(2m+2, 4, 2m+2) \subset W$ $\textcircled{\text{II}}$. Aus $\textcircled{\text{I}}$ (p. 77) und $\textcircled{\text{II}}$ also: $(2m+2, 4, 2m+2) = W$.

$(2m+2, 1, 0)$. Wir definieren folgende Teilräume von E :

$n < m$	$p < 6$	:	$X_{np} := k(ij0)_{ij0 \in (2m+1, 5, 0)_{np} \cap M}$
$n = m$	$p = 0$	:	$X_{n0} := R_{n-1} + T_{n-1}$
	$0 < p < 6$	:	$X_{np} := (2m+1, 5, 0)_{np}$
$m < n < \omega_0$	$p < 6$	:	$X_{np} := (2m+1, 5, 0)_{np}$

$$X := \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} X_{np} \quad , \quad Y := \sum_{\substack{n < m \\ p < 6}} k(ijl)_{ijl \in (2m+1, 5, 0)_{np} \setminus M} \quad , \quad U := X + Y.$$

Aus den Definitionen auf den Seiten 40, 49-52, 68, 73, 82 folgt leicht, dass alle X_{np} die Eigenschaft ⑤ besitzen. Weil je zwei verschiedene X'_{np} nur den Nullvektor gemeinsam haben, besitzt auch X die Eigenschaft ⑤. Da zusätzlich in X' kein $0n1 \in \mathcal{B}$ ($0 < n < \omega_0$) vorkommt, $Y = Y' \subset N$ (N : vgl. p. 42), $X' \cap Y = (0)$, gilt nach Satz 7: $\bar{U} = U$.

Für $n=m, p=0$ gilt (vgl. p. 50):

$$H_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} = H_{n0} + \sum_{i=g}^r C'_i + \sum_{i=\bar{r}}^t C'_i = I_{n0} + \sum_{i=g}^r C'_i + \sum_{i=\bar{r}}^t C'_i = I_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1}, \text{ also}$$

$$H_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} = I_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} \quad \textcircled{1} \Rightarrow H_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} = I_{n0} + X_{n0} \Rightarrow$$

$$(2m+1, 5, 0) = I_{n0} + U \quad \textcircled{2} \quad [\text{vgl. } (2m+1, 5, 0), \text{ p. 73}]. \quad \text{Sei}$$

$$A := I'_{n0} + k(x_i 0')_{i < \omega_1} \text{ für } n=m, p=0 \Rightarrow I_{n0} \subset A, U \subset k(\mathcal{B} \setminus A),$$

$$A \not\subset k(\mathcal{B} \setminus A) = E. \text{ Daraus erhält man mit } \textcircled{2}, \text{ Satz 4 (p. 16, 17),}$$

$$(1) \text{ (p. 53)}, \bar{U} = U, \textcircled{1}: (2m+2, 1, 0) := \overline{(2m+1, 5, 0)} = \overline{I_{n0} + U} =$$

$$\overline{I_{n0} + U} = I'_{n0} + U = I'_{n0} + X_{n0} + U = I'_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} + U =$$

$$H'_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1} + U = H'_{n0} + U, \text{ also } (2m+2, 1, 0) = H'_{n0} + U.$$

$H'_{n0} + U$ stimmt aber überein mit $(2m+2, 1, 0)$ auf Seite 70 (m ist dort überall durch $m+1$ zu ersetzen).

$$(2m+2, 3, 0). \quad (2m+2, 1, 0)_{np}^{\perp} \subset (2m+2, 1, 0)^{\perp}. \text{ Daraus}$$

$$\text{folgt mit (2) (p. 53): } (2m+2, 1, 0)' \subset (2m+2, 1, 0)^{\perp}. \text{ Wegen}$$

$$\text{Korollar (a) (p. 42) gilt also } (2m+2, 1, 0)^{\perp} = (2m+2, 1, 0)'. \text{ Nach (4) (p. 36) ist}$$

$$(2m+2, 3, 0) = (2m+2, 1, 0)^{\perp}, \text{ also}$$

$$(2m+2, 3, 0) = (2m+2, 1, 0)'. \quad (2m+2, 1, 0)' \text{ ist aber}$$

die Summe der Teilräume unter $(2m+2, 3, 0)$ auf Seite 70.

$(2m+2, 4, 0)$. Mit den Abkürzungen und Schranken auf den Seiten 49-52 definieren wir folgende Teilräume:

$$P_1 := k(\mathcal{B} \setminus [\bigcup_{i < 4} M_i \cup (1, 4, 1)']) + k(1\mu 0) + W_1$$

$$P_i := k(i\iota 0) + W_i \quad 2 \leq i \leq 4$$

$$P_5 := k(5\iota 0)$$

$$P_{np} := k(ij0)_{ij0 \in G'_{np}} \quad n < \omega_0, p < 6, np \neq 03$$

$$P_{03} := (0)$$

Wir beweisen zunächst einige Beziehungen.

$$V_1 \cap P_1 = (0) \quad \textcircled{1}.$$

Beweis. Sei $x \in V_1 \setminus \{0\} \Rightarrow$ In der Darstellung von x als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ tritt mindestens ein $1\mu 1$, aber kein $1\mu 0'$ auf. Daraus folgt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von x in $\mathcal{B}$, sowie den Definitionen von P_1, M_1, M_3, W_1 (p. 52): $x \notin P_1$.

$$V_2 \cap P_2 = (0) \quad \textcircled{2}.$$

Beweis. Sei $x \in V_2 \setminus \{0\} \Rightarrow$ In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ kommt mindestens ein $7\lambda 0$ oder $7\lambda 0'$ vor. Mit den Definitionen von P_2 und W_2 erhält man wieder aus der Eindeutigkeit der Darstellung von x in $\mathcal{B}$: $x \notin P_2$.

$$V_i \cap P_i = (0) \quad i = 3, 4 \quad \textcircled{3}.$$

Beweis analog zu $\textcircled{1}$.

$$(V_5 + V_6) \cap P_5 = (0) \quad \textcircled{4}.$$

Beweis. Sei $x \in (V_5 + V_6) \setminus \{0\}$. Weil $V_5' \cap V_6' = k(5\iota 0)$, enthält die Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein $5\iota 1$ oder $6\lambda 0$ oder $6\lambda 0'$. Daraus folgt: $x \notin P_5$.

Sei $W_{np} := (2m+2, 4, 2m+2)_{np}$, $U_{np} := (2m+2, 4, 0)_{np}$.

Damit gilt:

$$W_{np} \cap P_{np} = U_{np} \quad \text{für } n < \omega_0, p < 6 \quad (5).$$

- Beweis von (5) für $n < m \wedge p < 6$, sowie für $n = m \wedge p = 0, 1, 4, 5$:

Folgt direkt aus den Definitionen auf den Seiten 49-51, 70, 71, 87.

- Beweis von (5) für $n = m \wedge p = 2, 3$, sowie für $m < n < \omega_0 \wedge p < 4$:

a) $U_{np} \subset W_{np} \cap P_{np}$.

Folgt wie oben direkt aus den Definitionen dieser Räume.

b) $W_{np} \cap P_{np} \subset U_{np}$.

Sei $x \in W_{np} \setminus U_{np}$. Es ist zu zeigen, dass $x \notin P_{np}$.

$$W_{np} = G_{np} + U_{np} = F_{np} + \sum_{i=s}^{r-1} A_i + \sum_{i=\tau}^{t-1} A_i + B_\sigma + U_{np}, \quad \text{wobei}$$

$$\sigma := \begin{cases} r & \text{für } p = 0, 1 \\ t & \text{für } p = 2, 3 \end{cases}$$

$$x \in W_{np} \Rightarrow x = f + \sum_{i=s}^{r-1} a_i + \sum_{i=\tau}^{t-1} a_i + b + u, \quad \text{wobei}$$

$$f \in F_{np}, a_i \in A_i, b \in B_\sigma, u \in U_{np}. \quad x \notin U_{np} \Rightarrow x - u \neq 0 \Rightarrow$$

$$f \neq 0 \vee a_i \neq 0 \vee b \neq 0. \quad \text{Ist } f \neq 0, \text{ so enthält die Dar-}$$

stellung von f in $\mathcal{B}$ mindestens ein $x1 \in F'_{np}$ falls $p = 0, 2$, mindestens ein $x1 \in L'_{np}$ oder $xv1 \in Q'_{np}$ falls $p = 1, 3$

(vgl. p. 50, 49). Für $a_i \neq 0$ bzw. $b \neq 0$ tritt in der Dar-

stellung dieser Vektoren in $\mathcal{B}$ mindestens ein

$ix1 \in A'_i$ bzw. $\sigma x1 \in B'_\sigma$ auf. Damit erhält man:

Weil $f \neq 0 \vee a_i \neq 0 \vee b \neq 0$, kommt auch in der

Darstellung von x in $\mathcal{B}$ mindestens ein Basisvektor

der Länge 1 vor, denn alle Durchschnitte von

je zwei verschiedenen Teilräumen aus $F'_{np}, A'_i, B'_\sigma, U'_{np}$

für $p = 0, 2$ bzw. $L'_{np}, Q'_{np}, A'_i, B'_\sigma, U'_{np}$ für $p = 1, 3$

enthalten höchstens Basisvektoren der Länge Null.

Daraus folgt: $x \notin P_{np}$ (nach Definition von P_{np}).

- Beweis von ⑤ für $m < n < \omega_0 \wedge p = 4, 5$:

Der soeben durchgeführte Beweis kann übernommen werden, wenn darin die entsprechenden Änderungen vorgenommen werden ($\sum_{i=\tau}^{t-1} A_i$ fällt weg; B_σ fällt weg für $p = 4$; $B_\sigma = B_\tau$ für $p = 5$; Ist $f \neq 0$, so enthält die Darstellung von f in $\mathcal{B}$ mindestens ein $x \cdot 1 \in F'_{np}$). Damit ist ⑤ vollständig bewiesen.

Es gilt $(0, 7, 0) = k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) + \sum_{i=1}^4 W_i = \sum_{i=1}^5 P_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} P_{np}$ (vgl. p. 51, 52, 62, 63, 87; $n=0, p=3: x \cdot 00 \in P_{04}$). Daraus folgt: $(2m+2, 4, 0) := (2m+2, 4, 2m+2) \cap (0, 7, 0) = \left(\sum_{i=1}^6 V_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} W_{np} \right) \cap \left(\sum_{i=1}^5 P_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} P_{np} \right)$ ⑥. Weil alle Durchschnitte

von je zwei verschiedenen Teilräumen aus $V'_i + P'_i$ $1 \leq i \leq 4$, $(V'_5 + V'_6) + P'_5 (= V'_5 + V'_6)$, $(W'_{03} + W'_{04}) + (P'_{03} + P'_{04})$, $W'_{np} + P'_{np}$ $n < \omega_0, p < 6, np \neq 03, 04$ nur den Nullvektor enthalten, kann Satz 11 (p. 49) auf Durchschnitt ⑥ angewendet werden: $(2m+2, 4, 0) = \sum_{i=1}^4 (V_i \cap P_i) + (V_5 + V_6) \cap P_5 + (W_{03} + W_{04}) \cap (P_{03} + P_{04}) + \sum_{\substack{n < \omega_0, p < 6 \\ np \neq 03, 04}} (W_{np} \cap P_{np})$. Daraus erhält man mit

den Beziehungen ① - ⑤ (p. 87, 88) und $(W_{03} + W_{04}) \cap (P_{03} + P_{04}) = U_{03} + U_{04}$ den Teilraum $(2m+2, 4, 0)$ auf Seite 71.

$(2m+2, 2, 0)$. Sei $2_{np} := (2m+2, 2, 0)_{np}$,

$3_{np} := (2m+2, 3, 0)_{np}$, $4_{np} := (2m+2, 4, 0)_{np}$.

Mit V.1 und Satz 11 gilt

$(2m+2, 2, 0) = (2m+2, 4, 0) \cap (2m+2, 3, 0) = \left(\sum_{n,p} 4_{np} \right) \cap \left(\sum_{n,p} 3_{np} \right) = \sum_{n,p} (4_{np} \cap 3_{np})$. Es bleibt zu zeigen: $4_{np} \cap 3_{np} = 2_{np}$ für $n < \omega_0, p < 6$ ①.

- Beweis von ① für $n < m \wedge p < 6$, sowie für $n = m \wedge p = 0, 1, 4, 5$:

$4_{np} = 3_{np} = 2_{np}$ (vgl. p. 70, 71).

- Beweis von ① für $m < n < \omega_0 \wedge p = 4, 5$:

$$p = 4: \quad 4_{np} \subset 3_{np} \quad \wedge \quad 4_{np} = 2_{np}$$

$$p = 5: \quad 3_{np} \subset 4_{np} \quad \wedge \quad 3_{np} = 2_{np}.$$

- Beweis von ① für $n = m \wedge p = 2, 3$, sowie für $m < n < \omega_0 \wedge p < 4$:

$$A) \quad 2_{np} \subset 4_{np} \cap 3_{np} : \text{klar.}$$

$$B) \quad 4_{np} \cap 3_{np} \subset 2_{np} :$$

Sei $x \in 4_{np} \setminus 2_{np}$. Es ist zu zeigen, dass $x \notin 3_{np}$.

$$4_{np} = Y_{np} + 2_{np}, \text{ wobei } Y_{np} := \begin{cases} H_{np} & \text{für } n = m \wedge p = 2, 3 \\ C_{r-m} & \text{für } m < n < \omega_0 \wedge p = 0, 1 \\ C_{t-m} & \text{für } m < n < \omega_0 \wedge p = 2, 3 \end{cases}$$

$$x \in 4_{np} \Rightarrow x = y + z, \quad y \in Y_{np}, \quad z \in 2_{np}. \quad x \notin 2_{np} \Rightarrow x - z \neq 0 \Rightarrow y \neq 0.$$

$$a) \quad n = m \wedge p = 2, 3.$$

$y \in Y_{np} \Rightarrow y \in H_{np} \Rightarrow$ Die Darstellung von y in $\mathcal{B}$ enthält mindestens ein $x_i 0 \notin 2'_{np}$ falls $p = 2$, mindestens ein

$y_i 0 \notin 2'_{np}$ falls $p = 3$. Weil $x = y + z$ und $z \in 2_{np}$, tritt $x_i 0$ bzw. $y_i 0$ auch in der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ auf.

Daraus folgt (wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von x in $\mathcal{B}$) $x \notin 3_{np}$, denn $x_i 0, y_i 0 \notin 3'_{np}$.

$$b) \quad m < n < \omega_0 \wedge p = 0, 1.$$

$y \in Y_{np} \Rightarrow y \in C_{r-m} \Rightarrow$ In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ kommt mindestens ein $r-m \beta 0 \notin 2'_{np}$ vor.

Analog zu a) folgt daraus $x \notin 3_{np}$.

$$c) \quad m < n < \omega_0 \wedge p = 2, 3.$$

Wie unter b) erhält man auch hier $x \notin 3_{np}$.

Damit ist auch B) bewiesen.

$$(2m+2, 5, 0). \quad (2m+2, 5, 0) := (2m+2, 3, 0) + (2m+2, 4, 0).$$

Man verifiziert leicht, dass $5_{np} = 3_{np} + 4_{np}$ (vgl. p. 70, 71).

$$(2m+2, 4, 2m+1).$$

$$(2m+2, 4, 2m+1) := (2m+1, 4, 2m+1) + (2m+2, 4, 0).$$

Auch hier erhält man mit den Definitionen auf den Seiten 49-51, 71, 73:

$$(2m+2, 4, 2m+1)_{np} = (2m+1, 4, 2m+1)_{np} + (2m+2, 4, 0)_{np}.$$

$$(2m+2, 5, 1). \quad (2m+2, 5, 1) := (1, 4, 1) + (2m+2, 5, 0).$$

Wie oben erhält man $(2m+2, 5, 1)_{np} = (1, 4, 1)_{np} + (2m+2, 5, 0)_{np}$ (vgl. p. 49-51, 62, 70-72).

$(2m+3, 4, 2m+3)$. Der Beweis verläuft analog wie der Beweis für $(2m+2, 4, 2m+2)$. zur Übertragung muss man im Beweis auf den Seiten 77-85 überall $(2m+2, 4, 2m+2)$ ersetzen durch $(2m+3, 4, 2m+3)$ (p. 73), $(2m+1, 5, 1)$ ersetzen durch $(2m+2, 5, 1)$ (p. 72). Mit diesen Änderungen kann die Seite 77 bis ④ übernommen werden.

- Beweis von ④ für $n < m \wedge p < 6$, $n = m \wedge p = 0, 1, 4, 5$, $n = m+1 \wedge p = 4$: alle Fälle wurden auf Seite 77 behandelt.

- Beweis von ④ für $n = m \wedge p = 2, 3$:

wie für $n = m \wedge p = 0, 1$ auf Seite 77: man muss dort nur R_{n-1} durch R_n , D_r durch E_r , E_t durch D_t , $p = 0$ bzw. 1 durch $p = 2$ bzw. 3 ersetzen.

- Beweis von ④ für $n = m+1 \wedge p = 0, 1$:

Man muss im Beweis für $n = m \wedge p = 2, 3$ auf Seite 78 überall C_{r-n} durch C_{r-n+1} , R_{n-1} durch R_{n-2} , und anschließend n [und in $(2m, 5, 0)$ m] durch $m+1$ ersetzen.

- Beweis von ④ für $m+1 < n < \omega_0 \wedge p=0,1$:

$$m < n-1 \Rightarrow -n+1 < -m \Rightarrow g = r-n+1 < r-m \Rightarrow g < r-m < r \text{ ⑥.}$$

Analog: $\tau < t-m < t$ ⑦. Damit verläuft der Beweis völlig analog zum Beweis von ④ für $m < n < \omega_0 \wedge p < 4$ auf Seite 78; man muss dort nur t durch $t-1$ und T_{m-1} durch T_m ersetzen.

- Beweis von ④ für $m < n < \omega_0 \wedge p=2,3$:

Wie auf Seite 78 beweist man: $g < r-m < r$ ⑥. Den Rest des Beweises kann man wieder von Seite 78 übernehmen; man muss dort nur r durch $r-1$ und R_{m-1} durch R_m ersetzen.

- Beweis von ④ für $m+1 < n < \omega_0 \wedge p=4$:

$g < r-m < r$ ⑥ (vgl. $p=0,1$). Den Rest erhält man durch Weglassen von $C_{t-m} + T_{m-1}$ im soeben geführten Beweis für $p=2,3$.

- Beweis von ④ für $m < n < \omega_0 \wedge p=5$:

genau wie auf Seite 78.

Damit ist ④ bewiesen.

Aus ② und ④ folgt ① (vgl. p. 77).

Wir definieren nun folgende Teilräume von E (vgl. p. 79):

	$i < 3$	X_i : vgl. p. 79
$n \leq m$	$p < 6$	} $X_{np} := k(ij0)_{ij0 \in G'_{np} \cap M}$
$n = m+1$	$p = 4$	
$n = m+1$	$p = 0$	
	$p = 1$	$X_{n1} := L_{n1} + H_{n1} + C_{r-n+1} + R_{n-2} + T_{n-1}$
	$p = 2,3$	$X_{np} := F_{np} + C_{r-n} + R_{n-1} + C_{t-n+1} + T_{n-2}$ ($r-n=g, t-n+1=\tau$)
	$p = 5$	$X_{n5} := F_{n5} + C_{r-n+1} + R_{n-2}$ ($r-n+1=g$)

$$n=m+2 \quad p=0,1 : X_{np} := F_{np} + A_g + C_{r-m} + R_{m-1} + C_{t-m-1} + T_m \\ (r-m=g+1, t-m-1=\tau)$$

$$p=4 : X_{n_4} := F_{n_4} + C_{r-m-1} + R_m \quad (r-m-1=g)$$

$$m+1 < n < \omega_0 \quad p=2,3 : X_{np} := F_{np} + \sum_{i=g}^{r-m-2} A_i + C_{r-m-1} + R_m + \\ \sum_{i=\tau}^{t-m-1} A_i + C_{t-m} + T_{m-1}$$

$$p=5 : X_{n_5} := F_{n_5} + \sum_{i=g}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + R_{m-1}$$

$$m+2 < n < \omega_0 \quad p=0,1 : X_{np} := F_{np} + \sum_{i=g}^{r-m-1} A_i + C_{r-m} + R_{m-1} + \\ \sum_{i=\tau}^{t-m-2} A_i + C_{t-m-1} + T_m$$

$$p=4 : X_{n_4} := F_{n_4} + \sum_{i=g}^{r-m-2} A_i + C_{r-m-1} + R_m$$

$$\left. \begin{array}{ll} n \leq m & p < 6 \\ n = m+1 & p = 4 \end{array} \right\} Y_{np} := k(ijl)_{ijl \in G'_{np} \setminus M}$$

$$n=m+1 \quad p=0 : Y_{n_0} := k(x\lambda 1) + \sum_{i=g}^r k(ix1) + \sum_{i=\tau}^{t-1} k(ix1)$$

$$p=1 : Y_{n_1} := k(xv1) + \sum_{i=g}^r k(ix1) + \sum_{i=\tau}^{t-1} k(ix1)$$

$$m+1 < n < \omega_0 \quad p=0,1 : Y_{np} := \sum_{i=r-m}^r k(ix1) + \sum_{i=t-m-1}^{t-1} k(ix1) \\ (n=m+2: r-m=g+1, t-m-1=\tau)$$

$$p=4 : Y_{np} := \sum_{i=r-m-1}^{r-1} k(ix1) \\ (n=m+2: r-m-1=g)$$

$$m < n < \omega_0 \quad p=2,3 \quad : \quad Y_{np} := \sum_{i=r-m-1}^{r-1} k(i, \gamma 1) + \sum_{i=t-m}^t k(i, \gamma 1) \\ (n=m+1: r-m-1=g, t-m=\tau)$$

$$p=5 \quad : \quad Y_{np} := \sum_{i=r-m}^r k(i, \gamma 1) \\ (n=m+1: r-m=g)$$

Der Rest des Beweises verläuft völlig analog (zum größten Teil sogar gleich) wie der Beweis auf den Seiten 80-85.

$(2m+3, 1, 0)$. Wir definieren folgende Teilräume von E :

$$\left. \begin{array}{ll} n < m & p < 6 \\ n = m & p = 0, 1 \end{array} \right\} X_{np} := k(i, j 0)_{i, j 0 \in (2m+2, 5, 0)_{np} \cap M}$$

$$n = m \quad p = 2 \quad : \quad X_{n2} := R_n + T_{n-1}$$

$$\text{restliche } n, p \quad : \quad X_{np} := (2m+2, 5, 0)_{np}$$

$$X := \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} X_{np} \quad , \quad Y := \sum_{\substack{n < m, p < 6 \\ n = m, p = 0, 1}} k(i, j l)_{i, j l \in (2m+2, 5, 0)_{np} \setminus M} \quad , \quad U := X + Y.$$

Die Fortsetzung des Beweises findet man auf Seite 86.

Man muss dort nur die folgenden Änderungen ausführen:

$p=0$ ist überall zu ersetzen durch $p=2$

$$\begin{array}{llllll} R_{n-1} & " & " & " & " & R_n \\ (2m+2, 1, 0) & " & " & " & " & (2m+3, 1, 0) \text{ (vgl. p. 72)} \\ (2m+1, 5, 0) & " & " & " & " & (2m+2, 5, 0) \text{ (vgl. p. 71)}. \end{array}$$

$(2m+3, 3, 0)$.

Der Beweis für $(2m+2, 3, 0)$ auf Seite 86 kann wieder-
verwendet werden, wenn man dort

$(2m+2, 3, 0)$ ersetzt durch $(2m+3, 3, 0)$ (p. 72)

$(2m+2, 1, 0)$ " " $(2m+3, 1, 0)$ (p. 72).

$(2m+3, 4, 0)$. Die Seite 87 kann unverändert übernommen werden. Auch den verbleibenden Teil beweist man analog wie auf den Seiten 88, 89.

$(2m+3, 2, 0)$. Der Beweis verläuft auch hier völlig analog zum Beweis für $(2m+2, 2, 0)$ auf den Seiten 89, 90.

$(2m+3, 5, 0)$, $(2m+3, 4, 2m+2)$, $(2m+3, 5, 1)$.
vgl. p. 91 oben.

Ende des Induktionsschrittes.

Vor dem Induktionsanfang ($m=2$) beweisen wir nun die Richtigkeit der auf den Seiten 65-69 aufgeschriebenen Teilräume.

$(1, 5, 0)$. Die ganze Seite 87 kann auch hier unverändert übernommen werden. Weiter gilt:
 $G_{np} \cap P_{np} = (1, 5, 0)_{np}$ für $n < \omega_0$, $p < 6$ ⑤.
 ⑤ beweist man analog wie auf Seite 88.
 Analog wie auf Seite 89 zeigt man

$$(1, 5, 0) := (1, 4, 1) \cap (0, 7, 0) = \left(\sum_{i=1}^6 V_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G_{np} \right) \cap \left(\sum_{i=1}^5 P_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} P_{np} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^4 (V_i \cap P_i) + (V_5 + V_6) \cap P_5 + (G_{03} + G_{04}) \cap (P_{03} + P_{04}) + \sum_{\substack{n < \omega_0, p < 6 \\ np \neq 03, 04}} (G_{np} \cap P_{np}).$$

Daraus erhält man mit ①-④ (p. 87), ⑤,
 $(G_{03} + G_{04}) \cap (P_{03} + P_{04}) = (1, 5, 0)_{03} + (1, 5, 0)_{04}$ den Teilraum
 $(1, 5, 0)$ auf Seite 65.

(2,4,2). Im Beweis für $(2m+2, 4, 2m+2)$ kann die Seite 77 bis ④ wiederverwendet werden, wenn man $(2m+2, 4, 2m+2)$ durch $(2, 4, 2)$ und $(2m+1, 5, 1)$ durch $(1, 4, 1)$ ersetzt. Für den Beweis von ④ werden die folgenden Beziehungen aus (1) (p.53) benötigt:

$$H_{op} \subset \bar{J}_{op}, \quad \bar{I}_{02} = I'_{02}, \quad \overline{H_{03} + I_{03}} = H'_{03} + I'_{03}, \quad \bar{H}_{05} = H'_{05}, \quad C_L \subset \bar{B}_L.$$

Aus ② und ④ folgt ① (vgl. p.77).

Wir definieren folgende Teilräume von E (vgl. p.79):

	$i < 3$	X_i : vgl. p.79
$n=0$	$p=0$	$X_{00} := H_{00} + C_g$
	$p=1$	$X_{01} := L_{01} + H_{01} + C_g$
	$1 < p < 6$	$X_{0p} := k(ij0)_{ij0 \in G'_{np} \cap M}$
$n=1$	$p=0,1$	$X_{1p} := F_{1p} + C_r + C_t \quad (r=g, t=\tau)$
	$p=2,3$	$X_{1p} := F_{1p} + A_g + C_r + C_t \quad (r=g+1)$
	$p=4,5$	$X_{1p} := F_{1p} + C_r \quad (r=g)$
$1 < n < \omega_0$	$p < 4$	$X_{np} := F_{np} + E_r + E_t$
	$p=4,5$	$X_{np} := F_{np} + E_r$
$n=0$	$p=0$	$Y_{00} := k(x\Lambda 1)$
	$p=1$	$Y_{01} := k(xv1)$
	$1 < p < 6$	$Y_{0p} := k(ijl)_{ijl \in G'_{np} \setminus M}$
$0 < n < \omega_0$	$p=0,1,5$	$Y_{np} := k(rx1)$
	$p=2,3$	$Y_{np} := k(tx1)$

Der Rest des Beweises verläuft wieder analog wie der Beweis auf den Seiten 80-85. Dabei folgt ⑩ (p.80) direkt aus den Definitionen der Teilräume.

(2,1,0). Sei $X := \sum_{\substack{n < \omega_0, p < 6 \\ np \neq 02}} (1,5,0)_{np}$. Wie auf Seite 86 oben zeigt man: $\bar{X} = X$. Sei $A := G'_{02} + k(x_i 0')_{i < \omega_1} \Rightarrow G_{02} \subset A, X \subset k(\mathcal{B} \setminus A), A \oplus k(\mathcal{B} \setminus A) = E$. Daraus erhält man mit Satz 4 (p. 16, 17), (1) (p. 53), $\bar{X} = X$:
 $(2,1,0) := \overline{(1,5,0)} = \overline{G_{02} + X} = \overline{G_{02}} + \bar{X} = G'_{02} + X$, also
 $(2,1,0) = G'_{02} + X \Rightarrow (2,1,0)$ auf Seite 65 ist richtig.

(2,3,0). Setze im Beweis für $(2m+2,3,0)$ auf Seite 86 $m=0$.

(2,4,0), (2,2,0). vgl. $(2m+3,4,0)$ bzw. $(2m+3,2,0)$ auf Seite 95 oben.

(2,5,0), (2,4,1), (2,5,1). vgl. p. 91 oben

(3,4,3). Wieder kann die Seite 77 mutatis mutandis bis ④ übernommen werden.

- Beweis von ④ für $n=0 \wedge p=0,1$:

$$(3,4,3)_{op} = G'_{op} = J'_{op} = J_{op} + (H'_{op} + I'_{op}) + C'_g = G_{op} + (H_{op} + I_{op}) + C'_g$$

Der Rest des Beweises läuft analog wie unter $n=m \wedge p=0,1$ auf Seite 77 unten. $n=0 \wedge 1 < p < 6$: klar.

- Beweis von ④ für $n=1 \wedge p=0,1$:

Ersetze im Beweis für $n=m \wedge p=2,3$ auf Seite 78 oben C_{r-n} durch C_r und T_{n-1} durch C'_t . R_{n-1} fällt weg.

- Beweis von ④ für $1 < n < \omega_0 \wedge p=0,1$:

Ersetze im Beweis für $m < n < \omega_0 \wedge p < 4$ (p. 78) $r-m$ durch r , $t-m$ durch $t-1$, $t-m+1$ durch t , R_{m-1} durch C_r , und setze in ⑨ t anstelle von r . ⑥, A_{r-m} , C'_{r-m+1} sind wegzulassen.

- Beweis von ④ für $0 < n < \omega_0 \wedge p=2,3$:

Im soeben geführten Beweis sind nur r und t zu vertauschen.

- Beweis von ④ für $n=1 \wedge p=4$:

vgl. $0 < n \leq m \wedge p=4,5$ auf Seite 77.

- Beweis von ④ für $1 < n < \omega_0 \wedge p=4$:

vgl. $m < n < \omega_0 \wedge p=4,5$ auf Seite 78 unten.

$0 < n < \omega_0 \wedge p=5$: klar. Damit ist ④ bewiesen.

Aus ② und ④ folgt ① (vgl. p. 77).

Setzt man in $(2m+3, 4, 2m+3)$ auf Seite 73 $m=0$, und lässt alle nicht definierten Ausdrücke (wie zum Beispiel R_{m-1}) weg, erhält man $(2m+3, 4, 2m+3)_{np} = (3, 4, 3)_{np}$. Damit beweist man den Rest wie bei $(2m+3, 4, 2m+3)$ auf den Seiten 92-94.

(3, 1, 0). Wir definieren folgende Teilräume von E :

$n=0$	$p=0$	:	$X_{00} := C'_g$
	$p=2, 4$	:	$X_{0p} := k(ij0)_{ij0 \in (2,5,0)_{op} \cap M}$
restliche	n, p	:	$X_{np} := (2, 5, 0)_{np}$

$$X := \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} X_{np}, \quad Y := \sum_{\substack{n=0 \\ p=2,4}} k(ijl)_{ijl \in (2,5,0)_{op} \cap M}, \quad U := X + Y.$$

Die Fortsetzung des Beweises findet man auf Seite 86 ($H_{n0} + R_{n-1} + T_{n-1}$ auf Seite 86 ist durch $H_{00} + C'_g$ zu ersetzen).

(3, 3, 0). vgl. $(2m+2, 3, 0)$, p. 86 unten.

(3, 4, 0), (3, 2, 0), (3, 5, 0), (3, 4, 2), (3, 5, 1).

Setzt man in den entsprechenden Räumen (p. 72-74) $m=0$, erhält man $(3, 4, 0)_{np} = (2m+3, 4, 0)_{np}, \dots, (3, 5, 1)_{np} = (2m+3, 5, 1)_{np}$. Die Beweise auf Seite 95 oben können also wieder verwendet werden.

Induktionsanfang (vgl. p. 76). Für $m=2$ zeigt man die Richtigkeit der auf den Seiten 70-74 aufgeführten Teilräume wie im Induktionsschritt. Die Beweise auf den Seiten 77-95 können fast unverändert übernommen werden.

Wir behandeln nun noch die restlichen Verbandselemente der Seiten 62-74.

(0,6,0). Die verwendeten Teilräume und Schranken sind auf den Seiten 49-52, 87 definiert.

Zuerst beweisen wir einige Beziehungen.

$$(V_2 + V_{12}) \cap P_2 = (0) \quad \text{I.}$$

Beweis. Sei $x \in (V_2 + V_{12}) \setminus \{0\} \Rightarrow x \in V_{12} + k(7\lambda 0, 7\lambda 0') \Rightarrow$ In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ tritt mindestens ein $7\lambda 0$ oder $7\lambda 0'$ oder $2i1$, aber kein $2i0'$ auf. Daraus folgt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von x in $\mathcal{B}$, sowie den Definitionen von P_2 und W_2 : $x \notin P_2$.

$$[V_4 + k(401)] \cap P_4 = (0) \quad \text{II.}$$

Beweis. Sei $x \in [V_4 + k(401)] \setminus \{0\} \Rightarrow x \in k(401) + k(4i1 + 4i0) \Rightarrow$ In der Darstellung von x in $\mathcal{B}$ kommt mindestens ein $4i1$ aber kein $4i0'$ mit $i < \omega_1$ vor. Daraus folgt analog zu I: $x \notin P_4$.

Analog wie auf Seite 89 zeigt man mit I, II, ① und ③ Seite 87

$$(0,6,0) := (0,6,3) \cap (0,7,0) = \left[\sum_{i=1}^4 V_i + V_{12} + k(401) + V_5' + V_6' + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G'_{np} \right] \cap \left(\sum_{i=1}^5 P_i + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} P_{np} \right) = V_1 \cap P_1 + (V_2 + V_{12}) \cap P_2 +$$

$$V_3 \cap P_3 + [V_4 + k(401)] \cap P_4 + (V_5' + V_6') \cap P_5 + (G'_{03} + G'_{04}) \cap (P_{03} + P_{04}) + \sum_{\substack{n < \omega_0, p < 6 \\ np \neq 03, 04}} (G'_{np} \cap P_{np}) = P_5 + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} P_{np} = (0,6,0) \text{ auf Seite 62.}$$

$$\underline{(2m, 6, 2m)} \quad 1 < m < \omega_0. \quad (2m, 6, 2m) := (2m, 4, 2m) + (0, 6, 0).$$

Aus den Teilräumen auf den Seiten 50, 51, 62, 71 erhält man $(2m, 6, 2m)$ auf Seite 74.

(0, 6, 1). W sei die Summe aller Teilräume auf Seite 62 bei $(0, 6, 1)$. Zu zeigen: $(0, 6, 1) = W$.

Aus den Definitionen von V_i (p. 51), (1) (p. 53), $(2m, 6, 2m)$

(p. 74) folgt $V'_5 = V_5 + V'_7 = V_5 + \overline{V_7} \subset \overline{(2m, 6, 2m)}$.

Weil $\overline{(2m, 6, 2m)} = (0, 6, 1)$ (vgl. p. 37), gilt also $V'_5 \subset (0, 6, 1)$
 $(2m, 6, 2m) \subset (0, 6, 1)$, für $1 < m < \omega_0$ (vgl. p. 35).

$$W \subset V'_5 + \sum_{1 < m < \omega_0} (2m, 6, 2m)$$

} $\Rightarrow$

$$W \subset (0, 6, 1) \quad \textcircled{\text{I}}.$$

Behauptung: $\overline{W} = W$.

Beweis. Sei $\mathcal{B}_i := \{0i1\} \cup \{ij0, ij0', ij1 \mid j < \omega_1^6\}$ $i = 1, 3$

$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3)$. Auf Seite 75 wurde verifiziert,

dass $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ eine Partition von $\mathcal{B}$ ist mit

$\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2 \perp \mathcal{B}_3$, und $V_i \subset k(\mathcal{B}_i)$ $i = 1, 3$.

Zusätzlich ist $U := V_2 + V_4 + V'_5 + V'_6 + \sum_{n < \omega_0, p < 6} G'_{np} \subset k(\mathcal{B}_2)$,

$W = V_1 + V_3 + U$. Daraus folgt mit Satz 4 (p. 16, 17) und (1) (p. 53)

$$\overline{W} = \overline{V_1 + V_3 + U} = \overline{V_1} + \overline{V_3} + \overline{U} = V_1 + V_3 + \overline{U}.$$

Zu zeigen bleibt: $\overline{U} = U$.

Beweis. M sei wie auf Seite 40 definiert.

$$X := V_{14} + V_4 + k(ij0)_{ij0 \in (V'_5 + V'_6) \cap M} + \sum_{n < \omega_0, p < 6} k(ij0)_{ij0 \in G'_{np} \cap M}$$

$$Y := \sum_{i=6,7} k(i\lambda 0') + \sum_{ijl \in (V'_5 + V'_6) \setminus M} k(ijl) + \sum_{n < \omega_0, p < 6} k(ijl)_{ijl \in G'_{np} \setminus M}$$

Es ist $U = X + Y$.

$\left. \begin{array}{l} y \in V_{14} \setminus \{0\} \\ z \in V_4 \setminus \{0\} \end{array} \right\}$ Die Darstellung von $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$ in $\mathcal{B}$ enthält

mindestens ein $\begin{Bmatrix} 7\lambda 0 \in V'_{14} \cap M \\ 4\iota 0 \in V'_4 \cap M \end{Bmatrix}$. Weil zudem $V'_{14} \cap V'_4 = (0)$,

besitzt $V_{14} + V_4$ die Eigenschaft ⑤ von Seite 82 oben.
 Aus der Definition von X folgt leicht, dass damit
 auch X die Eigenschaft ⑤ besitzt. Daraus erhält man
 wie auf Seite 85 $\bar{U} = U$, also $\bar{W} = W$, und
 schliesslich $(0,6,1) = W$ [auf Seite 85 muss man $(2m+1,5,1)$
 durch $(2m,6,2m)$ und $(2m+2,4,2m+2)$ durch $(0,6,1)$ ersetzen].

$(1,7,1)$. $(1,7,1) := (1,4,1) + (0,7,0)$. Damit erhält man
 $(1,7,1)$ auf Seite 65 aus $(1,4,1)$ (p. 62), $(0,7,0)$ (p. 63), sowie
 den Definitionen auf den Seiten 51, 52 $[k(1\mu 0) + k(i\iota 0)]_{1 \leq i \leq 6} \subset$
 $k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \Rightarrow V_1 + k(1\mu 0) + \sum_{i=2}^5 (V_i + k(i\iota 0)) + V_6 + k(5\iota 0) \subset (1,7,1) \Rightarrow$
 $\sum_{i=7}^{11} V_i + V'_6 \subset (1,7,1)$. .

$(0,8,0)$. W sei die Summe der Teilräume auf Seite
 63 unter $(0,8,0)$. Zu zeigen: $(0,8,0) = W$.

$W \subset (0,8,0)$ ①.

Beweis. $V_3 + V_9 + V_4 + V_8 + V_5 + V_7 \subset (1,7,1) \Rightarrow V_3 + \bar{V}_9 + V_4 + \bar{V}_8 +$
 $V_5 + \bar{V}_7 \subset (1,7,1)$. Daraus folgt mit (1) (p. 53) und
 $(1,7,1) = (0,8,0)$ (vgl. p. 37): $(V_3 + V'_9) + (V_4 + V'_8) + (V_5 + V'_7) \subset$
 $(0,8,0) \Rightarrow V'_3 + V'_4 + V'_5 \subset (0,8,0)$ ②.

Aus ② und $W_3 + W_4 \subset (1,7,1) \subset (0,8,0)$ folgt

$(V'_3 + W_3) + (V'_4 + W_4) \subset (0,8,0) \Rightarrow$
 $(V'_3 + W'_3) + (V'_4 + W'_4) \subset (0,8,0) \Rightarrow W'_3 + W'_4 \subset (0,8,0)$ ③.

$\left. \begin{array}{l} \sum_{n < \omega_0, p < 6} G'_{np} \subset (0,6,1) \text{ (vgl. p. 62)} \\ (0,6,1) \subset (0,8,0) \text{ (vgl. p. 38)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n < \omega_0, p < 6} G'_{np} \subset (0,8,0)$ ④.

Mit $(1,7,1)$ auf Seite 65, $(1,7,1) \subset (0,8,0)$ und ② - ④
 erhält man ①.

Sei $Y := k(7\lambda 0') + \sum_{i=3}^6 V'_i + W'_3 + W'_4 + \sum_{n < \omega_0, p < 6} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i)$

$Z := V_{10} + k(2\iota 1 - 2\iota 0') + Y$.

Behauptung: $\bar{Z} = Z$.

Beweis. Sei $z_0 \in \bar{Z}$. Zu zeigen: $z_0 \in Z$.

$$z_0 \in \bar{Z} \Rightarrow z_0 \in Z' = V'_{10} + k(2i0') + Y' (2i1 \in V'_{10}) = V'_{10} + k(2i0') + Y \Rightarrow$$

$$z_0 = \lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2i1 + \eta_l 2i0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 + y \quad \text{wobei } y \in Y,$$

$$L := \{\lambda \mid \mu_\lambda \neq 0\}, \quad I := \{l \mid \lambda_l \neq 0 \vee \eta_l \neq 0 \vee [\lambda \in L \wedge \omega_0 \cdot l < \lambda < \omega_0(l+1)]\}$$

und $\lambda_0, \lambda_l, \eta_l = 0$ sein dürfen ($\mu_\lambda \neq 0$ für ein $\omega_0 \cdot l < \lambda < \omega_0(l+1) \Rightarrow l \in I$). Sei $A := k(201) + k(2i1, 2i0')_{l \in I} +$

$k(0n1)_{3 < n < \omega_0}$. Weil $z_0 \in \bar{Z}$ und $A^\perp$ wegen $A < \mathcal{K}_1$ eine σ_1 -Nullumgebung ist, existiert ein $a \in A^\perp$ und

ein $z_1 \in Z$, so dass $z_0 + a = z_1$. $z_1, z_0 \in Z' \Rightarrow a \in Z' \Rightarrow$

$$a = \xi_0 201 + \sum_{l \in I} (\xi_l 2i1 + \eta_l 2i0') + \sum_{ij0 \in N} \mu_{ij} ij0 + b,$$

N endliche Teilmenge von M (Definition von M : p. 40),
 $b \in k(2i1, 2i0')_{l \notin I} + k[(Y \cap \mathcal{B}) \setminus M] (7\lambda 0 \in M, Y = Y', 0 < l < \omega_1).$

Aus $a \perp A$ und den Definitionen auf den Seiten 49-52, A, E (p. 39) folgt:

$$\Phi(2i1, a) = \xi_i = 0 \quad i \in \{0\} \cup I \quad (1).$$

$$\Phi(2i0, a) = \eta_l = 0 \quad l \in I \quad (2).$$

$$\Phi(0n1, a) = \sum_{ij0 \in N} \mu_{ij} (\alpha_n + \beta_{ij})^{-1} = 0 \quad 3 < n < \omega_0. \quad \text{Daraus}$$

folgt (vgl. p. 42 oben) $\mu_{ij} = 0 \quad \forall ij0 \in N \quad (3).$

Aus ①-③ also $a = b \in B := k(2i1, 2i0')_{l \notin I} + Y \quad (0 < l < \omega_1).$

$$z_1 \in Z \Rightarrow z_1 = \underbrace{\sum_{l \in J} \gamma_l (201 + 2i1) + \sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0}_{\in V_{10}} + \underbrace{\sum_{l \in I} \varepsilon_l (2i1 - 2i0')}_{\in k(2i1 - 2i0')} + c$$

wobei $c \in B$, I die oben definierte endliche Teilmenge von $\omega_1 \setminus \{0\}$, $L^* := \{\lambda \mid \delta_\lambda \neq 0\}$, $J := \{l \mid \gamma_l \neq 0 \vee [\lambda \in L^* \wedge \omega_0 \cdot l < \lambda < \omega_0(l+1)]\} =$
 $\{l \mid \lambda \in L^* \wedge \omega_0 \cdot l < \lambda < \omega_0(l+1)\}$ (denn aus $\gamma_l \neq 0$ in der Darstellung von z_1 , folgt mit der Definition von V_{10} : $\delta_\lambda \neq 0$ für ein $\omega_0 \cdot l < \lambda < \omega_0(l+1)$) und $\gamma_l, \varepsilon_l = 0$ sein dürfen.

$$z_0 + a = z_1 \Rightarrow (4) \quad \lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2i1 + \eta_l 2i0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 + y + a =$$

$$\sum_{l \in J} \gamma_l (201 + 2i1) + \sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0 + \sum_{l \in I} \varepsilon_l (2i1 - 2i0') + c \Rightarrow$$

$$\lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2l1 + \nu_l 2l0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 - \sum_{l \in J} \gamma_l (201 + 2l1) -$$

$$\sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0 - \sum_{l \in I} \varepsilon_l (2l1 - 2l0') = c - y - a \in B, \text{ weil } c, y, a \in B$$

$$\Rightarrow \textcircled{5} \left(\lambda_0 - \sum_{l \in J} \gamma_l \right) 201 + \sum_{l \in I} (\nu_l + \varepsilon_l) 2l0' + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 -$$

$$\sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0 + \sum_{l \in I} (\lambda_l - \varepsilon_l) 2l1 - \sum_{l \in J} \gamma_l 2l1 = c - y - a \in B' = B.$$

Mit der Eindeutigkeit der Darstellung in $\mathcal{B}$ erhält man aus Gleichung $\textcircled{5}$:

$$\textcircled{6} \left(\lambda_0 - \sum_{l \in J} \gamma_l \right) 201 = 0, \text{ denn } 201 \notin B'.$$

$$\textcircled{7} \sum_{l \in I} (\nu_l + \varepsilon_l) 2l0' = 0, \text{ da } 2l0' \notin B', l \in I.$$

$$\textcircled{8} \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 - \sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0 = 0, \text{ weil } 7\lambda 0 \notin B'.$$

$$\textcircled{8} \Rightarrow L^* = L \Rightarrow J \subset I \Rightarrow$$

$$\textcircled{9} \sum_{l \in I} (\lambda_l - \varepsilon_l) 2l1 - \sum_{l \in J \subset I} \gamma_l 2l1 = 0, \text{ denn } 2l1 \notin B', l \in I.$$

$\textcircled{6} - \textcircled{9}$ in Gleichung $\textcircled{5}$ eingesetzt ergibt $c - y - a = 0$.
Damit lautet die Gleichung $\textcircled{4}$:

$$\lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2l1 + \nu_l 2l0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 =$$

$$\sum_{l \in J} \gamma_l (201 + 2l1) + \sum_{\lambda \in L^*} \delta_\lambda 7\lambda 0 + \sum_{l \in I} \varepsilon_l (2l1 - 2l0') \in V_{10} +$$

$k(2l1 - 2l0') \subset \mathbb{Z}$ (vgl. z_1 , p. 102 und z_1 , p. 101 unten), also

$$\lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2l1 + \nu_l 2l0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$z_0 = \lambda_0 201 + \sum_{l \in I} (\lambda_l 2l1 + 2l0') + \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda 7\lambda 0 + y \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $\bar{Z} = Z$ bewiesen.

Sei $X := V_1 + V_{11} + W_1 + k(201 - 021) \Rightarrow W = X + Z$ (Definitionen: V_i :

p. 51; M_i, W_i : p. 52; W : p. 101. $W_2 = k(201 - 021) + k(211 - 210') \subset X + Z$,

$V_2 \subset V_{10} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in I} M_i) + k(7\lambda 0') \subset Z$. Damit erhält man $W \subset X + Z$.

Analog: $X + Z \subset W$). Weil dann $X \subset \mathcal{K}_1$ und $\bar{Z} = Z$, gilt (vgl. [2]) : $\bar{W} = W$. $(1, 7, 1) \in W \Rightarrow \overline{(1, 7, 1)} \in \bar{W}$.

Daraus folgt mit $\overline{(1, 7, 1)} = (0, 8, 0)$ und $\bar{W} = W$:

$(0, 8, 0) \in W$ (II). Aus (I) (p. 101) und (II) also $(0, 8, 0) = W$.

(0, 6, 2). Behauptung: $[V_2 + k(7\lambda 0)] \cap [V_2 + k(210) + W_2] = V_2$ ①

Beweis. Sei $x \in [V_2 + k(7\lambda 0)] \cap [V_2 + k(210) + W_2]$.

Zu zeigen: $x \in V_2$.

$$x = u + \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda \cdot 7\lambda 0 = v + \sum_{i \in I} \eta_i \cdot 210 + w \quad u, v \in V_2, w \in W_2.$$

Sei $y := w + \sum_{i \in I} \eta_i \cdot 210 - \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda \cdot 7\lambda 0$. Es ist $y = u - v \in V_2$. Aus den Definitionen von W_2 (p. 52) und y folgt: Ist $w \neq 0$, so tritt mindestens einer der Vektoren 021 oder 210' in der Darstellung von w in $\mathcal{B}$, und damit auch in der Darstellung von y in $\mathcal{B}$ auf. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von y in $\mathcal{B}$ steht dies im Widerspruch zu $y \in V_2$, denn nach Definition von V_2 ist $021 \notin V_2'$ und $210' \notin V_2'$. Es gilt also $w = 0$ und $y = \sum_{i \in I} \eta_i \cdot 210 - \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda \cdot 7\lambda 0$.

Aus $y \in V_2$ und der Definition von V_2 folgt: Kommt in der Darstellung von y in $\mathcal{B}$ der Summand $\eta_i \cdot 210$ vor, so tritt auch der Summand $\eta_i \cdot 211$ auf. Weil $y = \sum_{i \in I} \eta_i \cdot 210 - \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda \cdot 7\lambda 0$ gilt somit wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von y in $\mathcal{B}$ $\eta_i = 0 \quad i \in I$, also $x = v$.
 $\Rightarrow x \in V_2$.

Damit ist ① bewiesen.

$$(0,6,2) := (0,6,3) \cap (0,8,0) = \left(V_1 + (V_2 + V_{12}) + V_3 + [V_4 + k(401)] + (V'_5 + V'_6) + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} \right) \cap \left((V_1 + V_{11} + W_1) + (V_2 + V_{10} + W_2) + (V'_3 + W'_3) + (V'_4 + W'_4) + (V'_5 + V'_6) + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \right) = \left(V_1 + [V_2 + k(7\lambda 0)] + V_3 + [V_4 + k(401)] + (V'_5 + V'_6) + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} + (0) \right) \cap \left([V_1 + k(1\mu 0) + W_1] + [V_2 + k(2\iota 0) + W_2] + (V'_3 + W'_3) + (V'_4 + W'_4) + (V'_5 + V'_6) + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus [\bigcup_{i < 4} M_i \cup k(ij0)_{ij0 \in (1,4,1)'}]) \right).$$

Auf den letzten Durchschnitt kann man Satz 11 (p. 49) anwenden:

$$(0,6,2) = V_1 \cap [V_1 + k(1\mu 0) + W_1] + [V_2 + k(7\lambda 0)] \cap [V_2 + k(2\iota 0) + W_2] + V_3 \cap (V'_3 + W'_3) + [V_4 + k(401)] \cap (V'_4 + W'_4) + (V'_5 + V'_6) + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} + (0).$$

Daraus erhält man mit ① (p. 104) den Teilraum $(0,6,2)$ auf Seite 63.

$$(0,7,2). \quad (0,7,2) := (0,6,2) + (0,7,0) = \left[\sum_{i=1}^4 V_i + k(401) + \sum_{i=5}^6 V'_i + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} \right] + \left[k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) + \sum_{i=1}^4 W_i \right] =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^4 V_i + k(401) + \underbrace{k(1\mu 0) + \sum_{i=2}^4 k(i\iota 0)}_{\subset k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i)} \right\} +$$

$$\underbrace{\sum_{i=5}^6 V'_i + \sum_{n < \omega_{01}, p < 6} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) + \sum_{i=1}^4 W_i}_{X} =$$

$$\left\{ [V_1 + k(1\mu 0)] + \sum_{i=2}^3 [V_i + k(i\iota 0)] + [V_4 + k(401) + k(4\iota 0)] \right\} + X =$$

$$(V_1 + V_{11}) + (V_2 + V_{10}) + (V_3 + V_9) + V'_4 + X = (0,7,2) \text{ auf Seite 63.}$$

$$(0,8,1). \quad (0,8,1) := (0,6,3) + (0,8,0) = V_2 + V_{10} + V_{12} +$$

$$\underbrace{V_1 + V_{11} + \sum_{i=3}^6 V'_i + W_1 + W_2 + W'_3 + W'_4 + \sum_{\substack{n < \omega_0 \\ p < 6}} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i)}_Y =$$

$V_2 + V_{10} + V_{12} + k(210) + Y [\text{weil } k(210) \subset k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i) \subset Y] = V_2 + V_{12} + k(210) + Y [V_{10} \subset V_2 + k(210)] = V_2 + V_{12} + V_{13} + Y [V_{13} \subset V_{12} + k(210), k(210) \subset Y] = (0,8,1) \text{ auf Seite 64 oben.}$

(0,8,2). W sei die Summe aller Teilräume

unter $(0,8,2)$ (p.64). zu zeigen: $(0,8,2) = W$.

Aus den Definitionen der Teilräume V_i und (1) (p.53) folgt: $V'_2 = V_2 + V_{12} + V_{13} = V_2 + V_{12} + \overline{V_{13}} \subset \overline{V_2 + V_{12} + V_{13}}$, also mit $V_2 + V_{12} + V_{13} \subset (0,8,1)$ und $\overline{(0,8,1)} = (0,8,2)$ (p.37):

$$\left. \begin{array}{l} V'_2 \subset (0,8,2). \\ W_2 \subset (0,8,1) \\ (0,8,1) \subset (0,8,2) \text{ (p.38)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V'_2 + W_2 = V'_2 + W'_2 \subset (0,8,2). \\ W \subset (0,8,1) + V'_2 + W'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W \subset (0,8,2) \text{ (I)}$$

Sei $X := V_1 + V_n + W_1$, $Y := \sum_{i=2}^6 V'_i + \sum_{i=2}^4 W'_i + \sum_{n < \omega_0, p < 6} G'_{np} + k(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i < 4} M_i)$.

Es ist $W = X + Y$. $Y = Y' \Rightarrow \overline{Y} = Y$ (Korollar (b), p.42).

$$\left. \begin{array}{l} \dim X < s_1^* \\ \overline{Y} = Y \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{W} = W.$$

$$\left. \begin{array}{l} (0,8,1) \subset W \Rightarrow \overline{(0,8,1)} \subset \overline{W}. \\ (0,8,2) = \overline{(0,8,1)}, \overline{W} = W \end{array} \right\} \Rightarrow (0,8,2) \subset W \text{ (II).}$$

(I) und (II): $(0,8,2) = W$.

(0,8,3). Wir verwenden $(0,6,0)$ (vgl. p.62), Satz 5 (p.18), Satz 10 (p.47/48), sowie die Definition von M (p.40).

$$(0,8,3) := (0,6,0)^\perp = \left[\sum_{ij0 \in (0,6,0) \setminus M} k(ij0) + \sum_{ij0 \in (0,6,0) \cap M} k(ij0) \right]^\perp =$$

$$\bigcap_{ij0 \in (0,6,0) \setminus M} k(ij0)^\perp \cap \left[\sum_{ij0 \in (0,6,0) \cap M} k(ij0) \right]^\perp = \bigcap_{ij0 \in (0,6,0) \setminus M} k(\mathcal{B} \setminus \{ij0'\}) \cap$$

$$k[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in (0,6,0) \cap M\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\})] =$$

$$k[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in (0,6,0)\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\})] = (0,8,3) \text{ auf Seite 64.}$$

$$(m, 8, m) \quad 0 < m < \omega_0.$$

$(m, 8, m) := (m, 5, 0)^\perp = [(m, 5, 0)^\perp]^\perp = (m+1, 3, 0)^\perp$ [vgl. (4), p. 36], also

$(m, 8, m) = (m+1, 3, 0)^\perp$. Wir verwenden die Teilräume

$(m+1, 3, 0)$ (vgl. p. 65, 70, 72), Satz 5 (p. 18), Satz 10 (p. 47, 48), sowie die Definition von M (p. 40).

$$(m, 8, m) = (m+1, 3, 0)^\perp = \left[\sum_{ij0 \in (m+1, 3, 0) \setminus M} k(ij0) + \sum_{ij0 \in (m+1, 3, 0) \cap M} k(ij0) \right]^\perp =$$

$$\bigcap_{ij0 \in (m+1, 3, 0) \setminus M} k(ij0)^\perp \cap \left[\sum_{ij0 \in (m+1, 3, 0) \cap M} k(ij0) \right]^\perp = \bigcap_{ij0 \in (m+1, 3, 0) \setminus M} k(\mathcal{B} \setminus \{ij0'\}) \cap$$

$$k[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in (m+1, 3, 0) \cap M\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\})] =$$

$$k[\mathcal{B} \setminus (\{ij0' \mid ij0 \in (m+1, 3, 0)\} \cup \{0j1 \mid 3 < j < \omega_0\})] \quad (\text{vgl. p. 74}).$$

Damit ist die Richtigkeit aller auf den Seiten 62-74 aufgeführten Verbandselemente bewiesen.

Wir zeigen nun, dass im vorliegenden Modell sämtliche Elemente des Verbandes $\mathcal{V}(V)$ voneinander verschieden sind.

Für $1 < n < \omega_0$ gelten im Modell die folgenden Beziehungen ①:

$(1, 5, 0) \not\sqsubseteq (1, 4, 1)$, $(n, 4, n-1) \not\sqsubseteq (n, 4, n)$, $(n, 6, n) \not\sqsubseteq (0, 6, 1) \not\sqsubseteq (0, 6, 2) \not\sqsubseteq (0, 6, 3)$,
 $(0, 5, 0) \not\sqsubseteq (1, 5, 0)$, $(n, 3, 0) \not\sqsubseteq (n, 4, 0)$, $(n, 1, 0) \not\sqsubseteq (n, 2, 0) \not\sqsubseteq (n, 3, 0) \not\sqsubseteq (n, 5, 0) \not\sqsubseteq$
 $(n+1, 1, 0)$, $(n, 2, 0) \not\sqsubseteq (n, 4, 0) \not\sqsubseteq (n, 5, 0) \not\sqsubseteq (0, 6, 0) \not\sqsubseteq (0, 7, 0)$, $(1, 5, 0) \not\sqsubseteq (2, 1, 0)$,
 $(0, 7, 2) \not\sqsubseteq (0, 8, 0)$, $(0, 8, 1) \not\sqsubseteq (0, 8, 2) \not\sqsubseteq (0, 8, 3) \not\sqsubseteq (n, 8, n) \not\sqsubseteq (n-1, 8, n-1) \not\sqsubseteq$
 $(0, 8, 4)$. Diese Relationen verifiziert man leicht anhand der Verbandselemente auf den Seiten 62-74 (" $\subset$ " vgl.

p. 34/35, 38).

Anschließend beweisen wir, dass aus ① die Verschiedenheit sämtlicher Verbandselemente folgt.

Mit $(h, i, k)/(m, n, l)$ bezeichnen wir den Quotientenraum X/Y , wo X und Y Elemente von $\mathcal{V}(V)$ sind und die Nummern (h, i, k) bzw. (m, n, l) haben.

Aus dem 1. Isomorphiesatz der Gruppentheorie und der Struktur des Verbandes $\mathcal{V}$ (vgl. Diagramm, p.38) erhält man für $1 < n < m < \omega_0$, $1 \leq i \leq 5$, $k=6,7$:

$$(1,4,1)/(1,5,0) \cong (n,i,1)/(n,i,0) \cong (1,k,1)/(0,k,0).$$

Weil nach ① $(1,5,0) \not\subseteq (1,4,1)$, gilt damit im Modell $(n,i,0) \not\subseteq (n,i,1)$, $(0,k,0) \not\subseteq (1,k,1)$.

Ebenso:

$$(n,4,n)/(n,4,n-1) \cong (n,5,n)/(n,5,n-1) \cong (m,i,n)/(m,i,n-1) \cong (n,k,n)/(n-1,k,n-1).$$

Daraus folgt mit $(n,4,n-1) \not\subseteq (n,4,n)$: $(n,5,n-1) \not\subseteq (n,5,n)$, $(m,i,n-1) \not\subseteq (m,i,n)$, $(n-1,k,n-1) \not\subseteq (n,k,n)$.

Analog beweist man mit ①, dass im vorliegenden Modell zwei beliebige, mit verschiedenen Nummern bezeichnete und bezüglich Inklusion vergleichbare Elemente des Verbandes $\mathcal{V}$ nicht zusammenfallen.

Zu zeigen bleibt, dass zwei beliebige, bezüglich Inklusion nicht vergleichbare Verbandselemente (vgl. p.38) auch im Modell bezüglich Inklusion unvergleichbar sind. Zunächst beweisen wir:

Für $1 < n < \omega_0$, $s < n$, $t \leq n$ gilt im Modell

$$a) (n,3,s) \not\subseteq (n,4,t) \quad b) (n,4,t) \not\subseteq (n,3,s).$$

Beweise (indirekt).

a) Annahme: Es existieren n,s,t , so dass $(n,3,s) \subseteq (n,4,t)$. Wegen $(n,3,0) \subseteq (n,3,s)$ und $(n,4,t) \subseteq (n,4,n)$ (vgl. p.38), folgt aus dieser Annahme $(n,3,0) \subseteq (n,4,n)$, was durch Vergleich von $(n,3,0)$ (p.65, 67, 70, 72) und $(n,4,n)$ (p.66, 69, 71, 73) widerlegt wird.

b) Annahme: Es existieren n,s,t , so dass $(n,4,t) \subseteq (n,3,s)$. Daraus folgt $(n,4,t) \cap (n,3,s) = (n,4,t)$. Es gilt $(n,4,t) \cap (n,3,s) = (n,2,r)$, $r := \min(t,s)$ (vgl. p.38). Also: $(n,2,r) = (n,4,t)$. Oben wurde bewiesen, dass aus $(n,2,0) \not\subseteq (n,4,0)$ (vgl. ①) folgt: $(n,2,r) \not\subseteq (n,4,r)$.

Da $(n, 4, r) < (n, 4, t)$ somit $(n, 2, r) \not\subseteq (n, 4, t)$.

Dies widerspricht $(n, 2, r) = (n, 4, t)$.

a) und b) besagen, dass $(n, 3, s)$ und $(n, 4, t)$ auch im Modell bezüglich Inklusion nicht vergleichbar sind. Für die restlichen, nicht vergleichbaren Verbandselemente folgt dies ebenfalls sofort aus den Resultaten der Seiten 107, 108.

[Beispiel: $(4, 4, 2)$ und $(4, 5, 1)$ sind nicht vergleichbar (vgl. p. 38). Annahme: $(4, 4, 2) < (4, 5, 1) \Rightarrow (4, 5, 2) = (4, 4, 2) + (4, 5, 1) = (4, 5, 1)$, also $(4, 5, 1) = (4, 5, 2)$: Widerspruch zu $(4, 5, 1) \not\subseteq (4, 5, 2)$ (vgl. p. 108). Somit gilt $(4, 4, 2) \not\leq (4, 5, 1)$. Ebenso zeigt man $(4, 5, 1) \not\leq (4, 4, 2)$].

Wir haben also ein Modell des Verbandes $\mathcal{V}(V)$ konstruiert und damit bewiesen, dass dieser minimal ist. Wir vermuten stark, dass ein Modell von $\mathcal{V}(V)$ existiert für Körper k beliebiger Kardinalität (k kommutativ, $\text{char } k \neq 0$).

Unter dem Euklidischen Defekt $d(E)$ verstehen wir die kleinste der Kardinalzahlen $\dim E/F$, wobei F alle nicht ausgearteten, euklidischen Teilräume von E durchläuft (vgl. [7], [2]). Aus der Definition von E (p. 39) folgt leicht $d(E) < s_1$.

VI. Reduktion des Verbandes $\tilde{V}$.

Die Vervollständigung $\tilde{V}$ des Verbandes $V(V)$ in $\mathcal{L}(E)$ wurde in [1] behandelt; die Beschreibung enthält aber einige "überflüssige" Elemente. Wir geben hier den "minimalen" Verband. Dazu

Satz 11. Seien (E, τ) ein $\mathcal{L}$ -Raum und $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von E , $|I| < \aleph_{\mathcal{L}}$.

Dann ist $O := \bigcap_{i \in I} O_i$ offen in E .

Beweis. Sei $x \in O$. zu zeigen: O ist Umgebung von x .

$x \in O \Rightarrow x \in O_i \quad \forall i \in I$
 $O_i \text{ offen in } E \} \Rightarrow O_i \text{ ist Umgebung von } x \Rightarrow -x + O_i \text{ ist}$

Nullumgebung $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} (-x + O_i) = -x + \bigcap_{i \in I} O_i = -x + O$ ist Null-
 umgebung $\Rightarrow x + (-x + O) = O$ ist Umgebung von x .

Korollar 1. Seien (E, τ) ein $\mathcal{L}$ -Raum und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von E , $|I| < \aleph_{\mathcal{L}}$.

Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in E .

Korollar 2. Sei (E, Φ) ein nicht-ausgearteter
 Sesquilinearraum versehen mit der $\sigma_{\mathcal{L}}$ -Topologie,
 $\dim E = \aleph_{\mathcal{L}}$. $(A_i)_{i < b}$ sei eine Familie
 $\sigma_{\mathcal{L}}$ -abgeschlossener Teilräume von E , b Ordinal-
 zahl mit $b < \omega_{\mathcal{L}}$, $A_j \subset A_k$ für alle $j < k < b$.

Dann ist $\sum_{i < b} A_i$ abgeschlossen in E .

Beweis. $\sum_{i < b} A_i = \bigcup_{i < b} A_i$. Der Rest folgt aus Korollar 1.

Korollar 3. Im Verband $\tilde{V}$ sind die Verbands-
 elemente $(m, 5, 0)$ und $(m, 5, m)$ $\sigma_{\mathcal{L}}$ -abgeschlossen.

Dabei ist m Limeszahl, $m < \omega_{\mathcal{L}+1}$, $m \neq \omega_{\mathcal{L}} \cdot \xi$ ($\xi < \omega_{\mathcal{L}+1}$).

Beweis. $m = \omega_\alpha \cdot a + b$, $b < \omega_\alpha$, b Limeszahl.

Damit gilt nach [1] (p. 11, 12) $(m, 5, 0) := \sum_{j < m} (j, 5, 0) = \sum_{j < m} (j+1, 1, 0) = \sum_{j < m} \overline{(j, 5, 0)} = \sum_{i < b} \overline{(\omega_\alpha \cdot a + i, 5, 0)}$, also

$$(m, 5, 0) = \sum_{i < b} \overline{(\omega_\alpha \cdot a + i, 5, 0)} \Rightarrow \overline{(m, 5, 0)} = (m, 5, 0) \text{ (Korollar 2).}$$

Ebenso: $(m, 5, m) := \sum_{j < m} (j, \wp_j, j) = \sum_{i < b} (\omega_\alpha \cdot a + i, \wp_{\omega_\alpha \cdot a + i}, \omega_\alpha \cdot a + i) =$

$$\sum_{i < b} \overline{(\omega_\alpha \cdot a + i, \wp_{\omega_\alpha \cdot a + i}, \omega_\alpha \cdot a + i)} \Rightarrow \overline{(m, 5, m)} = (m, 5, m).$$

Im folgenden sei m Limeszahl, $m < \omega_{\alpha+1}$, $m \neq \omega_\alpha \cdot \xi$.

Wegen Korollar 3 gelten in $\tilde{O}$ die folgenden Identitäten:

$$(a) \quad (m, 5, m) = (m+1, 4, m+1); \quad (m, 5, 0) = (m+1, i, 0) \quad i=1, 2, 4.$$

$$(b) \quad (m+n, 3, 0) = (m+n, 5, 0) = (m+n+1, i, 0) \\ 1 \leq n < \omega_0 \text{ und } n \text{ ungerade}; \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$(c) \quad (m+n, 4, 0) = (m+n, 5, 0) = (m+n+1, i, 0) \\ 2 \leq n < \omega_0 \text{ und } n \text{ gerade}; \quad i=1, 2, 4.$$

$$(d) \quad (m+n, 4, m+n) = (m+n+1, 4, m+n+1) \\ 2 \leq n < \omega_0 \text{ und } n \text{ gerade}.$$

Beweis.

Wir verwenden die Resultate von [1] p. 11-15, 23, 24 und Korollar 3.

$$(a) \quad (m+1, 4, m+1) := \overline{(m, 5, 1)} = \overline{(m, 5, m)} = (m, 5, m); \Rightarrow \\ (m+1, 4, 0) := (m+1, 4, m+1) \cap (0, 7, 0) = (m, 5, m) \cap (0, 7, 0) = \\ (m, 5, 0) \Rightarrow (m+1, i, 0) = (m, 5, 0) \quad i=1, 2, 4.$$

Die Identitäten (b) - (d) werden durch vollständige Induktion bewiesen.

Induktionsverankerung:

$$(b) \quad (m+1, 3, 0) := (m, 5, 0)^\perp = [(m, 5, m) \cap (0, 7, 0)]^\perp \stackrel{(a)}{=} \\$$

$$[(m+1, 4, m+1) \cap (0, 7, 0)]^\perp = (m+1, 4, 0)^\perp = (m+2, 3, 0).$$

$$(c) \quad (m+2, 4, 0) := \overline{(m+1, 5, 1)} \cap (0, 7, 0) = \overline{(m+1, 3, 1)} \cap (0, 7, 0) = \\$$

$$\overline{(1, 4, 1) + (m+1, 3, 0)} \cap (0, 7, 0) \stackrel{(b)}{=} \overline{(1, 4, 1) + (m+2, 3, 0)} \cap (0, 7, 0) = \\$$

$$\overline{(m+2, 3, 1)} \cap (0, 7, 0) = (m+3, 4, 0).$$

$$(d) \quad (m+2, 4, m+2) = \overline{(m+1, 3, 1)} = \overline{(1, 4, 1) + (m+1, 3, 0)} \stackrel{(b)}{=} \\$$

$$\overline{(1, 4, 1) + (m+2, 3, 0)} = \overline{(m+2, 3, 1)} = (m+3, 4, m+3).$$

Die Identitäten (b)-(d) seien nun für ein beliebiges n erfüllt.

Beweis für $n+1$:

$$(b) \quad (m+n+1, 3, 0) = (m+n, 4, 0)^\perp = (m+n+1, 4, 0)^\perp = \\$$

$$(m+n+2, 3, 0).$$

$$(c) \quad (m+n+1, 4, 0) := \overline{(m+n, 5, 1)} \cap (0, 7, 0) = \\$$

$$\overline{(m+n, 3, 1)} \cap (0, 7, 0) = \overline{(1, 4, 1) + (m+n, 3, 0)} \cap (0, 7, 0) = \\$$

$$\overline{(1, 4, 1) + (m+n+1, 3, 0)} \cap (0, 7, 0) = \overline{(m+n+1, 3, 1)} \cap (0, 7, 0) = \\$$

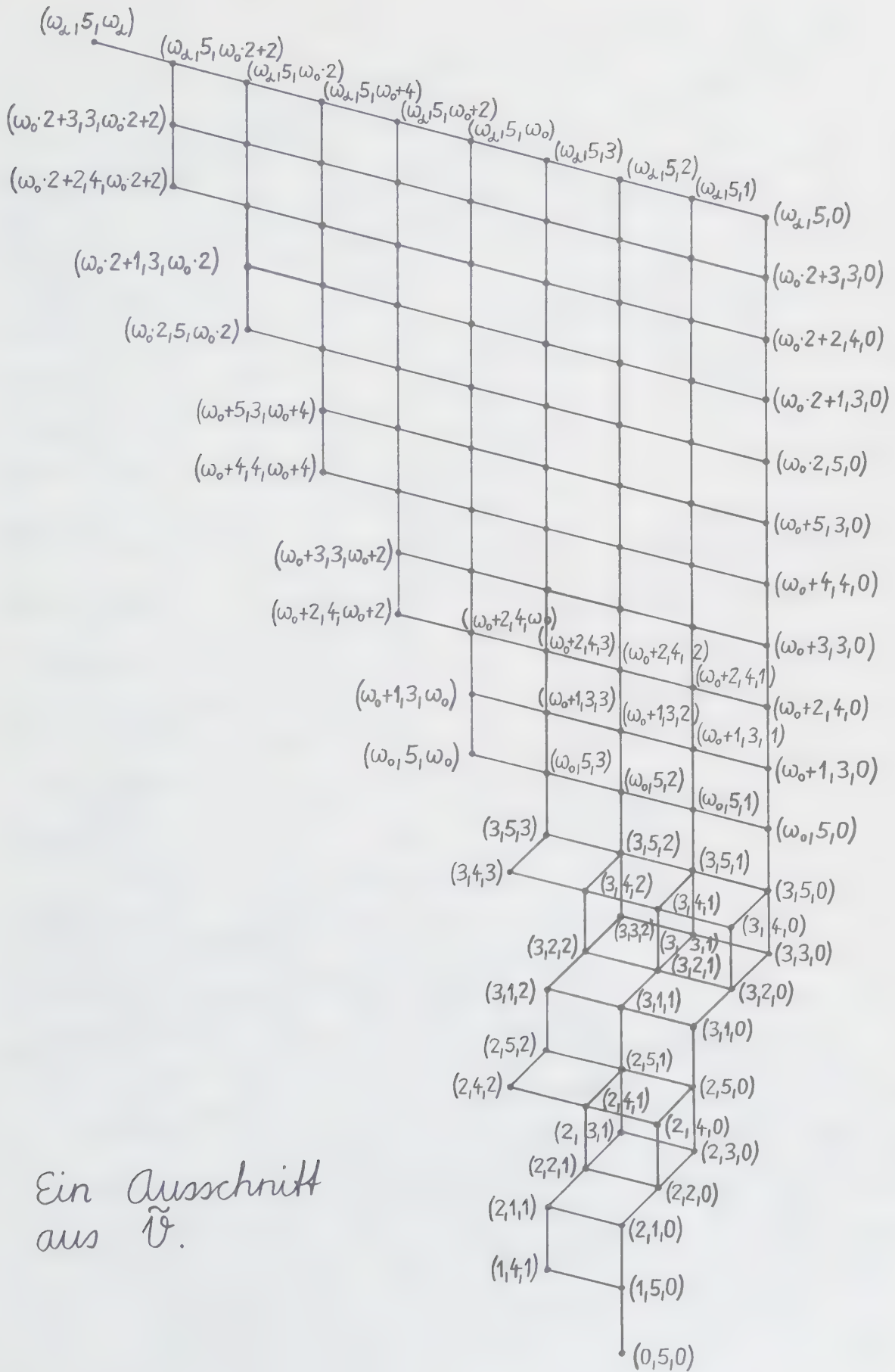
$$(m+n+2, 4, m+n+2) \cap (0, 7, 0) = (m+n+2, 4, 0).$$

$$(d) \quad (m+n+1, 4, m+n+1) = \overline{(m+n, 3, 1)} = \\$$

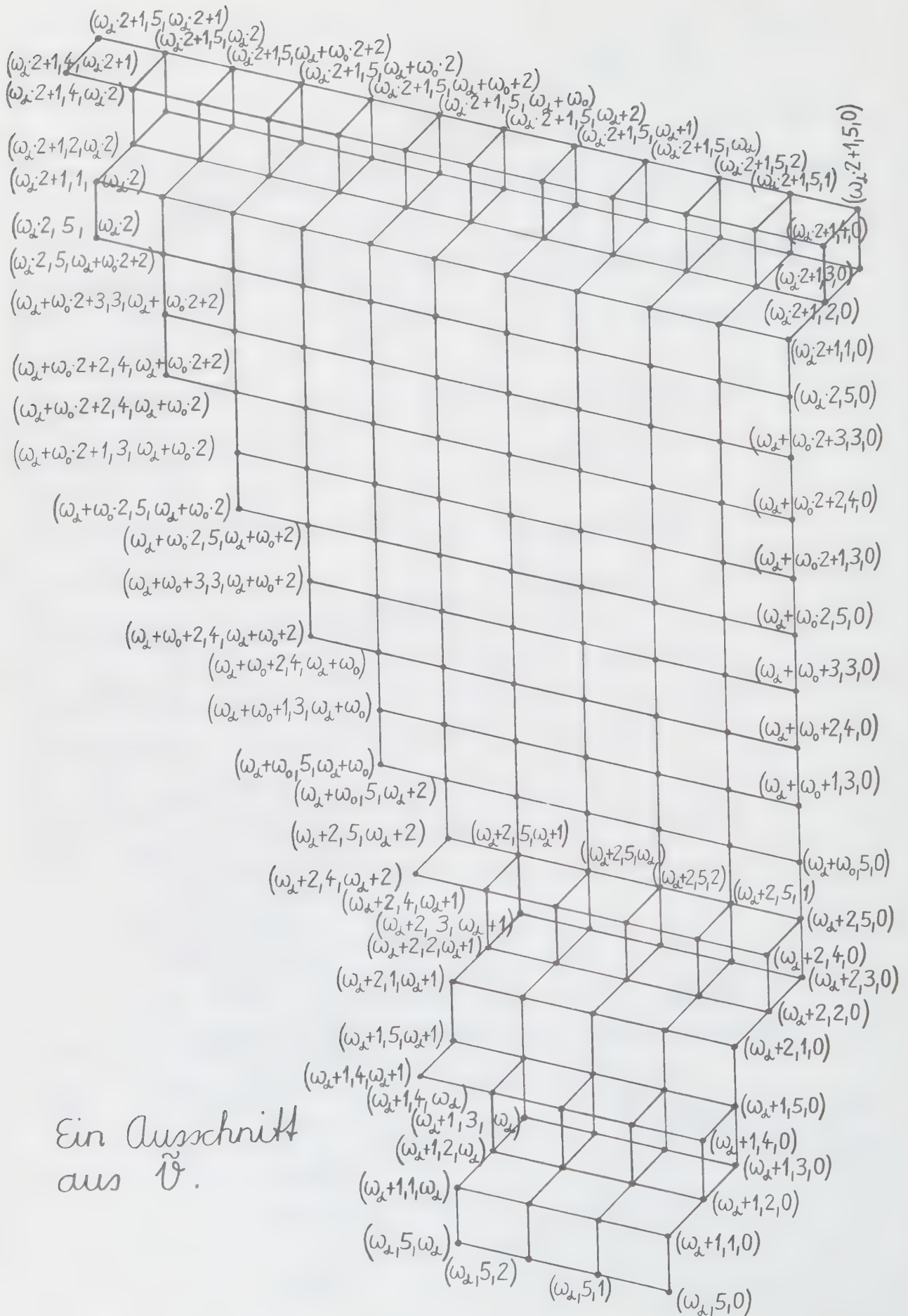
$$\overline{(1, 4, 1) + (m+n, 3, 0)} = \overline{(1, 4, 1) + (m+n+1, 3, 0)} = \\$$

$$\overline{(m+n+1, 3, 1)} = (m+n+2, 4, m+n+2).$$

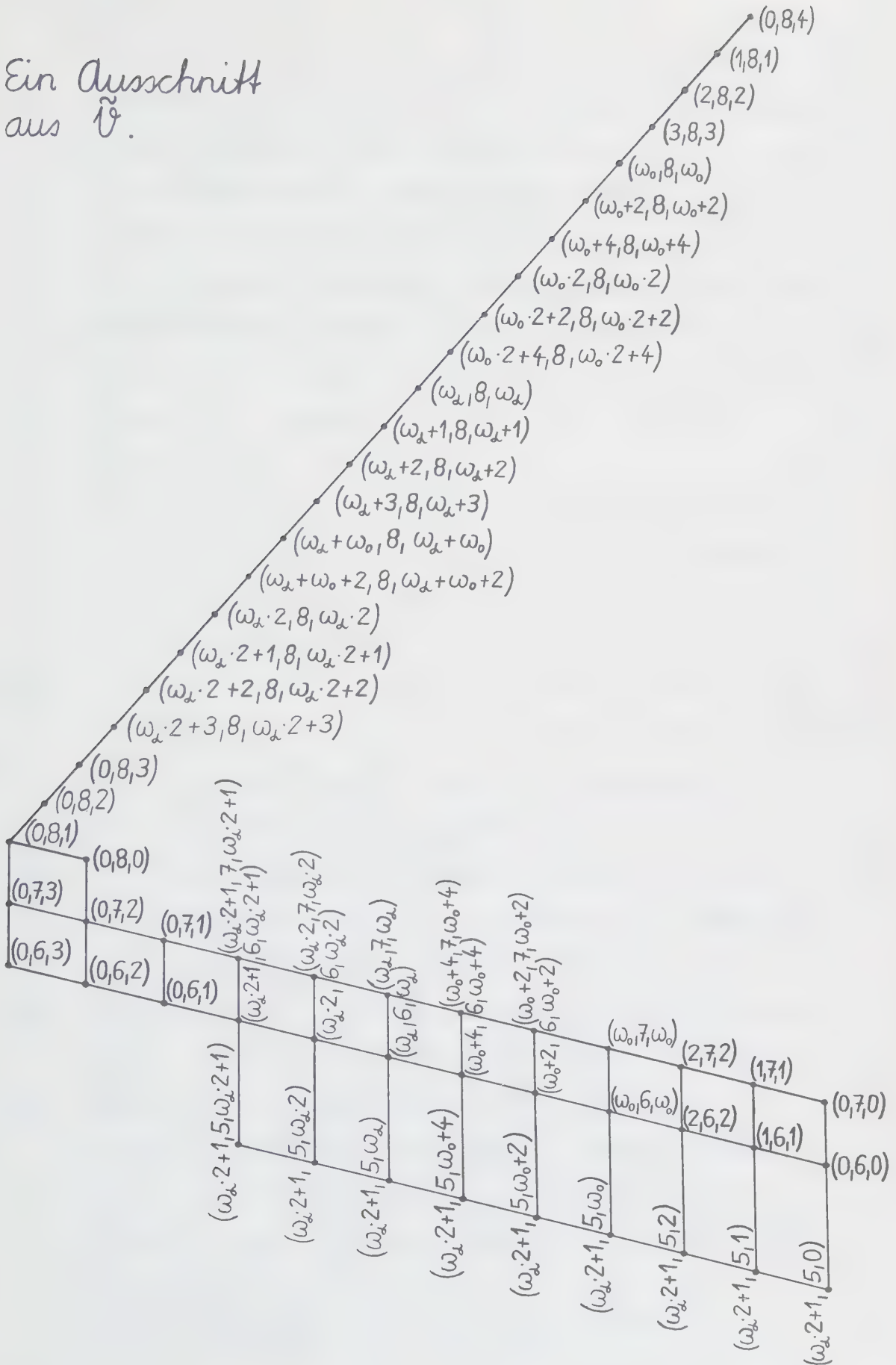
Mit Hilfe der Identitäten (a) - (d) erhält man folgendes Diagramm des Verbandes $\tilde{\mathcal{V}}$ (vgl. Diagramm von $\tilde{\mathcal{V}}$ in [1], p. 23, 24):



Ein Ausschnitt
aus $\tilde{V}$.



Ein Ausschnitt
aus $\tilde{V}$.



Bemerkung. Das Modell des Verbandes $\mathcal{V}(V)$ wurde so konstruiert, dass $\sum_{n < \omega_0} (n, 5, 0) \not\equiv (0, 6, 0)$ und $\sum_{n < \omega_0} (n, 6, n) \not\equiv (0, 6, 1)$ (vgl. p. 62-74^o). Damit kann dieses zu einem Modell des auf den Seiten 113-115 dargestellten Verbandes $\tilde{\mathcal{V}}$ erweitert werden. Eine solche Konstruktion führte der Verfasser der vorliegenden Arbeit durch. Man kann also $\tilde{\mathcal{V}}$ nicht weiter vereinfachen.

Literatur.

- [1] Amport, P.: Teilraumverbände in überabzählbar dimensionalen Sesquilinearräumen.
Dissertation. Universität Zürich 1978.
- [2] Bärli, W.: Sesquilineare Formen und lineare Topologien. Dissertation. Universität Zürich 1975.
- [3] Birkhoff, G.: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, 3rd edition, 1967.
- [4] Gross, H.: Quadratic Forms in Infinite Dimensional Vector Spaces.
Boston, Basel, Stuttgart. Birkhäuser 1979.
- [5] — On Witt's Theorem in the Denumerably Infinite Case. Trans. Amer. Math. Soc. 123, 536-547 (1966).
- [6] — On Witt's Theorem in the Denumerably Infinite Case II. Math. Annalen 170, 145-165 (1967).
- [7] — Der euklidische Defekt bei quadratischen Räumen. Math. Annalen 180, 95-137 (1969).
- [8] — Isomorphisms between lattices of linear subspaces which are induced by isometries. J. of Algebra, vol. 49, 537-546, 1977.
- [9] Kaplansky, I.: Forms in Infinite Dimensional Spaces. Ar. Acad. Bras. Ci. 22, 1-17 (1950).
- [10] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I. Berlin - Heidelberg - New York. Springer 1969.
- [11] Ogg, E.: Die abzählbare Topologie und die Existenz von Orthogonalbasen in unendlich-dimensionalen Räumen.
Math. Annalen 188, 233-250 (1970).

Lebenslauf.

Am 2. Dezember 1943 wurde ich, Erwin Otto Amport, in Wolhusen (LU) als Bürger von Thurstetten (Be) geboren. Nach der Sekundarschule absolvierte ich eine vierjährige Berufslehre als Maschinenzeichner bei der Firma Bell AG, Kriens. Gleichzeitig besuchte ich die Gewerbeschule der Stadt Luzern. 1964 erwarb ich das Diplom als Maschinenzeichner. In den folgenden Jahren arbeitete ich in verschiedenen Betrieben als Maschinenkonstrukteur. Nebenberuflich bereicherte ich mich bei der Akademikergemeinschaft Zürich auf die Matura vor. 1969 bestand ich in Zürich die eidgenössische Maturitätsprüfung, Typus C. Anschliessend folgten Studien an der philosophischen Fakultät II der Universität Zürich mit Mathematik im Hauptfach, Physik und Chemie in den Nebenfächern. Im Sommer 1974 bestand ich die Diplomprüfung. Danach unterrichtete ich Mathematik am Töchtergymnasium Luzern (1974/75) und an der Kantonschule Beromünster (1975-1978). Seit Herbst 1978 bin ich als Dozent für Mathematik am Zentralschweizerischen Technikum Luzern beschäftigt.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen folgender Professoren: H. Gross, H. Jarchow, G. Karrer, H. H. Keller, K. Stebel, F. Ulmer, B. L. van der Waerden, P. J. Huber, A. Steiner; E. Brun, W. Heitler, U. Meyer, G. Rasche, A. Thellung, H. Staub; C. H. Eugster, H. Labhart, H. Oswald, H. Schmid.

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung und unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Gross.

